Teil I

Algebra

Kapitel 1

Gruppen und Halbgruppen

Aufgabe 1: Kürzbarkeit in Halbgruppen

Sei H eine Halbgruppe. Ein Element $x \in H$ heißt linkskürzbar (rechtskürzbar), wenn für alle $a, b \in H$ gilt: Aus $xa = xb$ ($ax = bx$) folgt $a = b$. x heißt kürzbar, wenn x links- und rechtskürzbar ist. Man sagt, in H gilt die Kürzungsregel, wenn jedes Element von H kürzbar ist. Zeigen Sie:

a) In jeder Gruppe G gilt die Kürzungsregel.

b) H ist Gruppe genau dann, wenn H ein linksneutrales Element e besitzt und wenn es für jedes $x \in H$ ein $x' \in H$ gibt mit $x'x = e$.

c) Sei H eine endliche Halbgruppe. H besitzt genau dann ein linksneutrales (rechtsneutrales, neutrales) Element, wenn H ein linkskürzbares (rechtskürzbares, kürzbares) Element besitzt.

d) Eine endliche Halbgruppe H ist genau dann eine Gruppe, wenn in H die Kürzungsregel gilt.

Hinweis: Für $x \in H$ betrachte man die durch $h \mapsto xh$ bzw. $h \mapsto hx$ für alle $h \in H$ gegebenen Abbildungen $\lambda_x, \rho_x : H \to H$ (Linkstranslation, Rechtstranslation mit x) und beachte, dass x genau dann linkskürzbar bzw. rechtskürzbar ist, wenn λ_x bzw. ρ_x injektiv ist.

Kapitel 2

Körper

Aufgabe 2: Körper mit 2 und 3 Elementen

Bestimmen Sie alle Körper mit 2 und 3 Elementen.

Kapitel 3

Restklassen

Aufgabe 3: Division mit Rest

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $m \in \mathbb{Z}$ eindeutig durch m bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$m = qn + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < |n|.$$

q heißt partieller Quotient und r Rest der Division von m durch n. Mitunter bezeichnet man diesen Rest r mit $r_n(m)$.

Aufgabe 4: Division mit Rest II

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir:

$$r_n(m) := \begin{cases} m & \text{wenn } n = 0 \\ r & \text{wenn } n \neq 0 \end{cases},$$

wobei r im Fall $n \neq 0$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl ist mit $0 \leq r < |n|$ und $m = qn + r$ für geeignetes $q \in \mathbb{Z}$, (siehe „Division mit Rest I").

Zeigen Sie:

a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $r_n(a) = r_n(b)$ genau dann, wenn $n | a - b$.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} r_n(a+b) &= r_n(r_n(a)+b) = r_n(a + r_n(b)) = r_n(r_n(a) + r_n(b)) \quad \text{und} \\ r_n(a \cdot b) &= r_n(r_n(a) \cdot b) = r_n(a \cdot r_n(b)) = r_n(r_n(a) \cdot r_n(b)). \end{aligned}$$

c) Die Relation „$a \equiv b \Longleftrightarrow r_n(a) = r_n(b)$" ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$. Die dazugehörigen Äquivalentklassen heißen auch Restklassen modulo n.

Aufgabe 5: Division mit Rest III

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$L_n := \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \{0, 1, \ldots, |n| - 1\} & n \neq 0 \end{cases}$$

und definieren zweistellige Operationen $\oplus_n$ und $\odot_n$ auf L_n, indem wir für alle $a, b \in L_n$ setzen (siehe Division mit Rest II)

$$a \oplus_n b := r_n(a + b) \quad \text{und} \quad a \odot_n b := r_n(a \cdot b).$$

(Da offensichtlich $L_n = L_{-n}$, $\oplus_n = \oplus_{-n}$ und $\odot_n = \odot_{-n}$, kann man sich bei den nachfolgenden Überlegungen auf den Fall $n \in \mathbb{N}$ beschränken.)

Zeigen Sie:

a) $(L_n, \oplus_n, \odot_n)$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) L_n ist genau dann ein Körper, wenn n Primelement ist.

Bemerkung: Statt $\oplus_n$ und $\odot_n$ schreibt man kurz $+$ und $\cdot$.

Kapitel 4

Ringe

4.1 C(R)

Aufgabe 6: Definition und Eigenschaften von $C(R)$

Sei R ein Ring. In $R^2 = R \times R$ führen wir zwei zweistellige Operationen $+$ und $\cdot$ ein, indem wir für alle $(r_1, r_2), (s_1, s_2) \in R \times R$ setzen

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) + (s_1, s_2) &:= (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \text{ und} \\ (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) &:= (r_1 s_1 - r_2 s_2, r_1 s_2 + r_2 s_1). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. $(R^2, +, \cdot)$ ein Ring ist, der genau dann kommutativ ist, wenn R es ist. Man bezeichnet ihn mit $C(R)$.
2. $C(R)$ besitzt ein Einselement genau dann, wenn R ein Einselement besitzt.
3. Identifiziert man $x \in R$ mit $(x, 0_R) \in C(R)$, so ist R Unterring von $C(R)$. (Damit darf man z. B. $0_{C(R)} = 0_R$ setzen usw.)
4. Sei R kommutativ. Definiert man für $u := (a, b) \in C(R)$ die Norm von u durch $R \ni N(u) := a^2 + b^2$ $(= (a, b)(a, -b)$ wegen der in c) definierten Identifizierung), so gilt $N(uv) = N(u)N(v)$ für alle $u, v \in C(R)$.
5. Sei R kommutativ. Für $u \in C(R)$ gilt $u \in C(R)^*$ genau dann, wenn $N(u) \in R^*$[a].
6. Sei R kommutativ. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

   (i) $C(R)$ ist Integritätsring (Körper)

   (ii) R ist Integritätsring (Körper) und $N(u) \neq 0_R$ für alle $u \in C(R) \setminus \{0_R\}$

   (iii) $N(u) \neq 0_R$ $(N(u) \in R^*)$ für alle $u \in C(R) \setminus \{0_R\}$.

[a] Für einen Ring R bezeichnet R^* die Teilmenge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente von R

4.2 Homomorphismen

Aufgabe 7: Spurhomomorphismus

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}^+$. Ist $f : R^{n,n} \to R$ ein R-Homomorphismus mit $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in R^{n,n}$, so gibt es ein $r \in R$ mit $f = r \cdot \mathrm{spur}$ (d. h. $f(A) = r\,\mathrm{spur} A$ für alle $A \in R^{n,n}$).

4.3 Ideale

Aufgabe 8: Ideale in $\mathbb{Z}$

Eine Teilmenge I von $\mathbb{Z}$ heißt Ideal von $\mathbb{Z}$, wenn $I \neq \emptyset$ und wenn für alle $a \in \mathbb{Z}$ und alle $x, y \in I$ gilt $ax, x + y \in I$.

Z. B. sind $\{0\}$ und $\mathbb{Z}$ Ideale von $\mathbb{Z}$. $\{0\}$ wird Nullideal genannt und oft kurz mit O bezeichnet. Offensichtlich gilt $O \subseteq I$ für jedes Ideal I von $\mathbb{Z}$.

Für eine Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ setzen wir

$$\mathbb{Z}X := \begin{cases} O, & X = \emptyset \\ \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, x_1, \ldots, x_n \in X\}, & X \neq \emptyset \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für jede Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}X$ Ideal von $\mathbb{Z}$.

b) Ist $\mathcal{I}$ eine Menge von Idealen von $\mathbb{Z}$, so ist $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ Ideal von $\mathbb{Z}$.

c) Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $\mathcal{I}$ die Menge aller Ideale I von $\mathbb{Z}$ mit $X \subseteq I$. Dann gilt $\mathbb{Z}X = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$.

d) Für ein Ideal I von $\mathbb{Z}$ gilt $I \cap \mathbb{N}^+ \neq \emptyset$ genau dann, wenn $I \neq O$.

Aufgabe 9: Ideale in $\mathbb{Z}$

Für $x \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\mathbb{Z}x := \mathbb{Z}\{x\} \big(= \{ax \mid a \in \mathbb{Z}\}\big)$, s. Aufgabe „Ideale in $\mathbb{Z}$“.
Zeigen Sie:

a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $m|n$ genau dann, wenn $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}m$.

Ferner sind äquivalent:

(i) $n|m$ und $m|n$

(ii) $\mathbb{Z}m = \mathbb{Z}n$

(iii) $m = \pm n$.

Man verwende, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $ab = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$. Wenn $ab = 1$, so folgt $a = b = \pm 1$.

b) Für jedes Ideal I von $\mathbb{Z}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}$ mit $I = \mathbb{Z}m$.

Unter Verwendung der Aufgabe „Ideale in $\mathbb{Z}$“ betrachte man $I \cap \mathbb{N}^+$. Im Fall $I \neq O$ benutze man Division mit Rest.

4.4 Matrizenringe

Aufgabe 10: Beispiel für einen kommutativen Unterring

Zeigen Sie:

1. Die Teilmenge der quadratischen $(2,2)$-Matrizen mit der Gestalt
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$
bildet einen kommutativen Unterring im Ring der $(2,2)$-Matrizen.
2. Die Teilmenge der quadratischen $(2,2)$-Matrizen mit der Gestalt
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$
bildet einen kommutativen Unterring im Ring der $(2,2)$-Matrizen.

4.5 Nullteiler

Aufgabe 11: Integritätsringe

Sei R ein Ring. $x \in R$ heißt linker (rechter) Nullteiler von R, wenn es ein $y \in R \setminus \{0_R\}$ gibt mit $xy = 0_R$ ($yx = 0_R$). x heißt Nullteiler von R, wenn x linker oder rechter Nullteiler von R ist. R heißt nullteilerfrei, wenn R außer 0_R keine Nullteiler besitzt. Ein kommutativer nullteilerfreier Ring R mit Einselement $1_R \neq 0_R$ heißt Integritätsring. Zeigen Sie:

a) Jeder endliche nullteilerfreie Ring mit wenigstens zwei Elementen ist Schiefkörper.

Bemerkung: Nach einem Satz von Wedderburn ist jeder derartige Ring bereits kommutativ, also ein Körper.

b) Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent (s. Übungsaufgabe 30):

(i) L_n ist Integritätsring (ii) L_n ist Körper (iii) n ist Primzahl.

4.6 Teilbarkeit

Aufgabe 12: Größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache I

Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$.
$n \in \mathbb{Z}$ heißt größter gemeinsamer Teiler von X ($\mathrm{ggT}\, X$), wenn folgendes gilt:

- $n|x$ für alle $x \in X$ und
- $s|n$ für alle $s \in \mathbb{Z}$ mit $s|x$ für alle $x \in X$.

$n \in \mathbb{Z}$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von X ($\mathrm{kgV}\, X$), wenn folgendes gilt:

- $x|n$ für alle $x \in X$ und
- $n|s$ für alle $s \in \mathbb{Z}$ mit $x|s$ für alle $x \in X$.

Mit $\mathrm{GgT}\, X$ ($\mathrm{KgV}\, X$) bezeichnen wir die Menge aller größten gemeinsamen Teiler (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) von X.
Offensichtlich gilt $\mathrm{GgT}\, \emptyset = \mathrm{GgT}\, \{0\} = \{0\} = \mathrm{KgV}\, \mathbb{Z}$ und $\mathrm{GgT}\, \mathbb{Z} = \{1, -1\} = \mathrm{KgV}\, \emptyset$.
(Hierzu verwendet man: Wenn für $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a| \pm 1$, so folgt $a = \pm 1$.)
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{GgT}\, X = \mathrm{GgT}\, \mathbb{Z}X$

b) Sei I Ideal von $\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ sind äquivalent:

(i) $n \in \mathrm{GgT}\, I$

(ii) $n \in I$ und $n|m$ für alle $m \in I$

(iii) $I = \mathbb{Z}n$.

c) $\mathrm{KgV}\, X = \mathrm{GgT} \bigcap_{x \in X} \mathbb{Z}x$.

Insbesondere sind $\mathrm{GgT}\, X$ und $\mathrm{KgV}\, X$ für jede Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ nicht leer. Weiterhin gilt für $n \in \mathrm{GgT}\, X$: Es gibt $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}$ und $x_1, \ldots, x_p \in X$ mit $n = a_1x_1 + \ldots + a_px_p$.
Bemerkung: Nach dem Darstellungssatz für Ideale in $\mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}n$ und $\bigcap_{x \in X} \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}m$. Dann gilt $\mathrm{GgT}X = \{n, -n\}$ und $\mathrm{KgV}X = \{m, -m\}$. Meist bezeichnet man n als den größten gemeinsamen Teiler und m als das kleinste gemeinsame Vielfache von X und setzt $\mathrm{ggT}X := n$ sowie $\mathrm{kgV}X := m$.

Teil II

Analysis

Kapitel 5

Folgen

5.1 Funktionenfolgen

5.1.1 gleichmaessige Konvergenz

Aufgabe 13: Charakteristische Funktion

Für $M \subset X$ wird die charakteristische Funktion χ_M wie folgt definiert:

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in M \\ 0 & \text{für} \quad x \notin M \end{cases}.$$

1. Berechne
$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[-n,n]}(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$
Ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

2. Zeige, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch
$$f_n(x) := \mathrm{e}^{-|x|}\chi_{[-n,n]}(x)$$
gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die Funktion $\mathrm{e}^{-|x|}$ konvergiert.

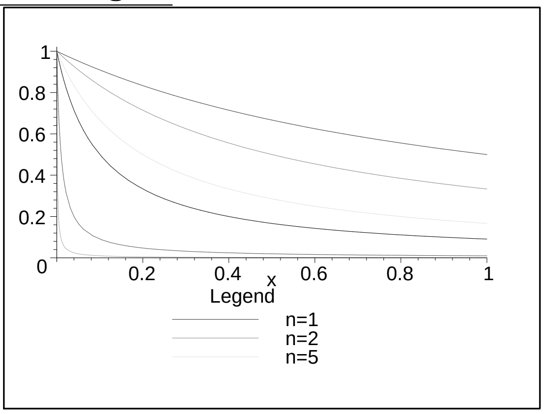
Aufgabe 14: Ein Beispiel zur gleichmäßigen Konvergenz

Man untersuche die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in den Intervallen

1. $[0, 1]$
2. $(0, 1]$
3. $[q, 1], 0 < q < 1$



Aufgabe 15: Eine Aufgabe zur gleichmäßigen Konvergenz

Man zeige, dass die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ eine stetige Grenzfunktion besitzt und berechne diese!

5.2 Zahlenfolgen

5.2.1 Anwendung der Definition

Aufgabe 16: Arithmetisches und geometrisches Mittel

Beweisen Sie:

1. Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

2. Ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}.$$

:

Aufgabe 17: Cauchy-Folgen

1. Führen Sie die Einzelheiten für den Beweis der folgenden Behauptung aus der Vorlesung aus: Jede komplexe Cauchyfolge ist beschränkt.
2. Ist die komplexe Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n + i^n$$

eine Cauchyfolge?

Aufgabe 18: (ε, n_0)-Abschätzungen

Zeigen Sie, dass die nachstehenden Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwertwert a konvergieren, und bestimmen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt (sogenannte (ε, n_0)-Abschätzung):

1. $a_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 2n + 2}$,
2. $a_n = \dfrac{2n^3 i - 4n^4}{n^4 + 3ni - 1}$,
3. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{10}$.

Achtung: In b) bezeichnet i die imaginäre Einheit, die Zahlenfolge ist also komplex!

Aufgabe 19: k-te Wurzel u. a.

1. Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $\left\{\sqrt[k]{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit einem festen $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge ist.

   Ist $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge? (Beweis oder Gegenbeispiel!).
2. Es seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei komplexe Nullfolgen, so dass

$$|y_0| + |y_1| + \ldots + |y_n| \leq K$$

   für alle $n = 0, 1, \ldots$ mit einer festen Schranke K gilt. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $\{z_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := x_0\, y_n + x_1\, y_{n?1} + \ldots + x_n\, y_0$$

   eine Nullfoge ist.

Aufgabe 20: Anwendungen der geometrischen Folge

Es sei $a > 0$. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für

1. $a_n = \dfrac{a^{2n}}{1 + a^{2n+1}}$,
2. $a_n = \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$,
3. $a_n = \dfrac{a^n}{\prod_{k=1}^{n}(1 + a^k)}$,

5.2.2 liminf und limsup

Aufgabe 21: Eigenschaften von $\liminf$ und $\liminf$

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

Man zeige:

1. $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k > n\} = \sup\{\inf\{a_k \mid k > n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
2. $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k > n\} = \inf\{\sup\{a_k \mid k > n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 22: Häufungswerte

Finde alle Häufungswerte der Zahlenfolge

$$x_n = \frac{n}{n+5}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

und bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 23: Häufungswerte und Limesmengen

1. Bestimmen Sie die Limesmenge $\mathscr{L}(F)$ der Folge $F = \{a_n - \lfloor a_n \rfloor\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern $a_n := 4^n/7$. Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ den größten ganzen Anteil einer reellen Zahl x, d. h. es ist $\mathbb{N} \ni \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Führen Sie die Einzelheiten für den Beweis der folgenden Behauptung aus: Jeder Häufungspunkt der Limesmenge $\mathscr{L}(F)$ einer einer komplexen Zahlenfolge F gehört wieder zur Limesmenge $\mathscr{L}(F)$.

Aufgabe 24: Rechnen mit oberen Grenzwerten

1. Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen. Zeigen Sie:
$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$
2. Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = (1 + (-1)^n)\,(-1)^{n(n+1)/2} \quad \text{bzw.} \quad a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}.$$

Aufgabe 25: Vergleich von Wurzel- und Quotientenkriterium.

Gegeben sei eine Zahlenfolge

1. Beweisen Sie:
$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$
2. Geben Sie eine Folge an, für die in der Formel kein Gleichheitszeichen auftritt.

Aufgabe 26: Polizistenregel

Zeigen Sie die Polizistenregel:
Gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{und} \qquad a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0,$$

so konvergiert auch die Folge $\{c_n\}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Aufgabe 27: Potenzfunktion versus Exponentialfunktion

Bestimmen Sie für festes $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Grentwerte

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n}$ für $b > 1$
2. $\lim_{n\to\infty} n^k\, a^n$ für $|a| < 1$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst a) für k=1 und leiten Sie die anderen Ergebnisse davon ab.

5.2.3 rekursiv definierte Folgen

Aufgabe 28: Eine rekursiv definierte Folge in $\mathbb{C}$

Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) \tag{5.1}$$

in Abhängigkeit vom Startwert $0 \neq z_1 \in \mathbb{C}$.

monoton beschränkte

Aufgabe 29: Arithmetisches Mittel

Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

1. Zeigen Sie, das die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
2. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 30: Konvergenzuntersuchung

Ist die Zahlenfolge

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

konvergent?

Aufgabe 31: fast monotone Folgen

Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ werde rekursiv definiert durch

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 32: Konvergenz rekursiv definierter Folgen

Gegeben sei ein $c > 0$, ein Startwert $x_0 \in (0, \frac{2}{c})$
und eine rekursiv definierte Folge: $x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n)$ (*)

Man zeige:

- a) Die Folge $\{x_n\}$ ist für $n \geq 1$ monoton wachsend und beschränkt.
- b) Es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{c}$.
- c) Im Fall $c \in (0, 2)$ und $x_0 = 1$ gilt: $x_n = \frac{1-(1-c)^{2^n}}{c}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 33: Eine monoton wachsende Folge

Sei $0 < b \in \mathbb{R}$ gegeben, wir definieren rekursiv die Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{b} \\ a_{n+1} &= \sqrt{b + a_n} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie deren Grenzwert!

Aufgabe 34: Monotone Teilfolgen

Es sei $a_0 > 0$ vorgegeben und die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \tag{5.2}$$

rekursiv definiert.

Besitzt die Folge $\{a_n\}$ einen Grenzwert ? Wenn ja, dann berechne man diesen.

Aufgabe 35: Quadratwurzel

Es seien x_0 und A positive reelle Zahlen. Ferner sei eine Folge $\{x_n\}$ rekursiv definiert durch:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Zeigen Sie, dass $x_n \geq \sqrt{A}$, $(n \in \mathbb{N})$.
2. Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq x_n$, $(n \in \mathbb{N})$.
3. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n$ existiert.
4. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

Aufgabe 36: Einschachtelung für rekursive Folgen

Es seien $a, b > 0$ gegeben und die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

5.2.4 Teilfolgen

Aufgabe 37: Existenz einer speziellen Teilfolge

Besitzt die Folge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ eine Teilfolge $\{a_{n_l}\}_{l\geq 1}$, die mit der Folge $\{(\sqrt{2}-1)^l\}_{l\geq 1}$ übereinstimmt? Wenn ja, geben Sie die ersten 5 Werte für n_l an.

Aufgabe 38: Häufungswerte

Finde alle Häufungswerte der Zahlenfolge

$$x_n = \frac{n}{n+5}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

und bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Kapitel 6

Funktionen

6.1 einer Variablen

6.1.1 Differentialrechnung

Anwendungen

Extremwertaufgaben

Aufgabe 39: Ein Minimalproblem

Es sei $f\colon (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $a < b$, $\varepsilon > 0$ und $f(a) = f(b) = 0$, $f(x) > 0$ f.a. $a < x < b$.
Es sei für $a < x_0 < x_1 < b$ die Funktion $D_{x_0,x_1}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$D_{x_0,x_1}(t) = \sqrt{(t-x_0)^2 + f(t)^2} + \sqrt{(t-x_1)^2 + f(t)^2}\,.$$

a) Gib eine geometrische Interpretation von $D(t)$.

b) Zeige: Für alle $a < x_0 < x_1 < b$ existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$D_{x_0,x_1}(\xi) = \inf_{t\in[a,b]} D_{x_0,x_1}(t)\,.$$

c) Sei T die Tangente von f in dem Punkt $(\xi, f(\xi))$. Was kann man über die Winkel zwischen T und der Strecke von $(x_0, 0)$ nach $(\xi, f(\xi))$ sowie zwischen T und der Strecke von $(x_1, 0)$ nach $(\xi, f(\xi))$ sagen?

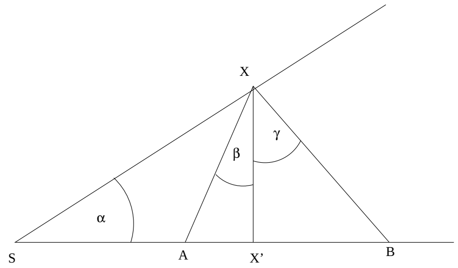
d) Gib eine geometrische Interpretation des Ergebnisses aus c).

Aufgabe 40: Kegelvolumen

Aus einem Kreis wird ein Sektor mit dem Zentriwinkel α herausgeschnitten. Der Sektor wird zu einem Kegel zusammengerollt. Bei welcher Größe des Winkels α wird das Volumen des Kegels am größten sein?

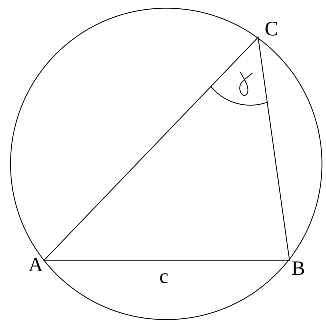
Aufgabe 41: Maximaler Sichtwinkel

Auf einem der beiden Schenkel eines Winkels $\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sind zwei Punkte A, B markiert mit den vom Scheitelpunkt S aus gemessenen Abständen $a, b (a < b)$. Gesucht wird auf dem anderen Schenkel der Punkt X, von dem aus die Strecke AB unter maximalem Winkel ϕ erscheint. Wie lauten bei festem α die Bedingungen für das Verhältnis $\lambda = a : b$, die darüber entscheiden, ob ϕ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist?



Aufgabe 42: Maximumproblem

Man suche unter allen Dreiecken mit gegebener fester Seite c und gegenüberliegendem Winkel γ dasjenige mit dem größten Flächeninhalt!



Fehlerrechnung

Aufgabe 43: Bestimmung der dritten Dreiecksseite

Lösen Sie die folgende Aufgabe im Rahmen der elementaren Fehlerrechnung, d.h. bei kleinem h wird für eine Differenz $f(x+h) - f(x)$ näherungsweise $f'(x)\Delta h$ gesetzt.
In einem Dreieck soll die Messung der Seiten b und c als genau angesehen werden, während die Messung des eingeschlossenen Winkels α mit dem absoluten Fehler $|d\alpha|$ behaftet ist.
Mit welchem absoluten und relativen Fehler kann daraus die dritte Dreiecksseite c berechnet werden? Rechnen Sie mit folgenden Zahlenwerten: $b = 400$ Meter, $c = 500$ Meter, $\alpha = 60$ Grad, $|d\alpha| = 10$ Bogensekunden (1 Bogensekunde = (1/3600) Grad).

lHospital

Aufgabe 44: Differenzenformel für 2. Ableitung

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}(f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)) = f''(x_0).$$

Aufgabe 45: Grenzwertberechnungen

Ermitteln Sie ob der Grenzwert existiert, und wenn er existiert, so berechnen Sie ihn.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (\cosh x - \sinh x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\arcsin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x|^x$.
6. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln(\ln x)}{\sin(x-e)}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(1/x)$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(e^{-1/x}-1)$.

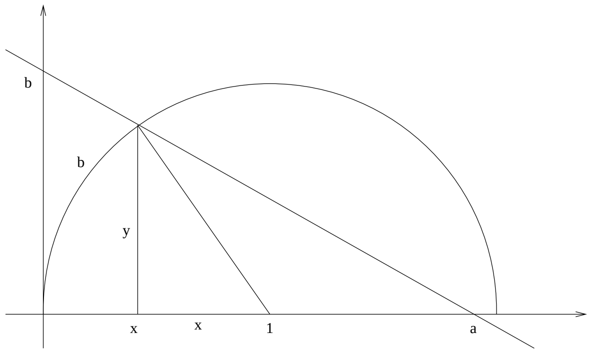
Aufgabe 46: Uneigentliche Integrale und Regel von de l'Hospital

Es sei f integrierbar auf $[0,b]$ für alle $b>0, \lim_{x\to\infty} f(x) = A, (A\in\mathbb{R})$, und $a>-1$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x^{-a-1} \int_0^x f(t)\, t^a\, dt.$$

Aufgabe:

Für einen Wert $x \in (0,1)$ betrachte man den auf den Kreisbogen eines Einheitkreises mit Mittelpunkt in (1,0) darüberliegenden Punkt mit der Ordinate y. Die Länge des zugehörigen Bogenstückes vom Ursprung bis zu diesem Punkt sei b. Die Gerade durch die Punkte $(0,b)$ und (x,y) schneide die x-Achse im Punkte $(a,0)$. Wie verhält sich a, wenn x gegen 0 strebt?



Bestimmung der Ableitung

Aufgabe 47: Bestimmung der Ableitungen

Ermitteln Sie die Definitionsbereiche und Ableitungen für die folgenden Funktionen.

1. $f_1(x) = |x|^a, \quad (a \in \mathbb{R});$
2. $f_2(x) = x^x$;
3. $f_3(x) = \sin(\mathrm{e}^{x^2})$;
4. $f_4(x) = \arctan(x^2 + 1)$;
5. $f_5(x) = \operatorname{arcosh}(1 + \sin x)$.

Mittelwertsätze

Aufgabe 48: Anwendung des Mittelwertsatzes

Sei $f : (0;1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und der Grenzwert $A = \lim_{x\to 0+0} f'(x)$ existiere.
Zeigen Sie:
Dann existiert auch $\lim_{x\to 0+0} f(x) := \lambda$. Ferner ist die durch $f(0) := \lambda$ auf $[0;1)$ fortgesetzte Funktion in 0 rechtsseitig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'_+(0) := \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+0} f'(x).$$

Aufgabe 49: Anwendung des Satzes von Rolle

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle: Die Gleichung

$$x^n + px + q = 0, \quad (p; q \in \mathbb{R})$$

hat für gerades $n \in \mathbb{N}$ höchstens zwei und für ungerades $n \in \mathbb{N}$ höchstens drei reelle Lösungen x.

Ungleichungen aus Mittelwertsatz

Aufgabe 50: Bernoulli-Ungleichung

Es seien $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, und $x \geq -1$. Benutzen Sie den Mittelwertsatz um die folgenden Ungleichungen zu zeigen:

$$\begin{array}{ll} (1+x)^a \leq 1 + ax & \text{wenn } \ 0 < a < 1 \\ (1+x)^a \geq 1 + ax & \text{wenn } \ a < 0 \ \text{ oder } \ a > 1. \end{array}$$

Aufgabe 51: Verallgemeinerter Satz von Rolle I

Beweisen Sie folgende verallgemeinerte Variante des Satzes von Rolle:
Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und es seien $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ Nullstellen von f. Dann existiert ein $\xi \in (x_0, x_n)$ mit $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Aufgabe 52: Verallgemeinerter Satz von Rolle II

Beweisen Sie den folgenden verallgemeinerten Satz von Rolle:

Es sei n eine natürliche Zahl und f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion, die bei a n-mal und im Inneren des Intervalls $(n+1)$-mal differenzierbar ist; weiterhin gelte:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n)}(a) = f(b) = 0.$$

Dann gibt es im Intervall (a,b) eine Stelle c mit $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Aufgabe 53: Zwischenwertsatz von Darboux

Beweisen Sie den Zwischenwertsatz von Darboux: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) < m < f'(b)$, so existiert ein $\zeta \in (a,b)$ mit $f'(\zeta) = m$.
Hinweis: Betrachten Sie für ein hinreichend kleines, aber festes $h > 0$ die stetige Hilfsfunktion ϕ mit

$$\phi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für} \quad x \in [a, b-h].$$

Taylorscher Lehrsatz

Aufgabe 54: Restgliedabschätzung

Verwenden Sie den Taylorschen Satz, um die Abschätzung

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| < \frac{1}{2000} \quad \text{für } |x| \leq 0.1$$

zu zeigen.

Taylorentwicklung von $\mathrm{e}^{Aufgabe55:-1/x^2}$

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion, dass für $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

gilt, für gewisse Polynome p_n, $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Theorie

Aufgabe 56: Differentiation von Determinanten

Determinanten werden zeilen- oder spaltenweise differenziert.

Es sei $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j} \leq n$ eine $(n \times n)$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen sind und $D(x) = \det A(x)$. Weiterhin seien für eine n-reihige Determinante $D(x)$ und $1 \leq k \leq n$ die Determinaten $S_k(x)$ bzw. $Z_k(x)$ diejenigen Determinanten, die aus $D(x)$ dadurch entstehen, dass man die Funktionen in der $k$ten Spalte bzw. Zeile durch Ihre ersten Ableitungen ersetzt. Dann gilt:

$$D'(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x) = \sum_{k=1}^{n} Z_k(x).$$

Aufgabe 57: Quotientenregel

Beweisen Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Entwicklungsformel

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon(h)$$

für differenzierbare Funktionen!

Aufgabe 58: Ableitung mit Hilfe der Definition.

Es seien $a \geq 0$ und

$$f_a(x) := \begin{cases} |x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

1. f_a ist stetig in 0 für jedes $a > 0$, aber nicht für $a = 0$.
2. f_a ist differenzierbar in 0 für jedes $a > 1$, aber nicht für $a \in (0;1]$.
3. f'_a ist stetig in 0 für $a > 2$, aber nicht für $a \in (1;2]$
4. Für $k \in \mathbb{N}, k > 1$ ist $f_a^{(k-1)}$ differenzierbar in 0 für jedes $a > k-1$, aber nicht für $a \in (k-2;k-1]$ und $f_a^{(k)}$ ist stetig in 0 für $a > k$, aber nicht für $a \in (k-1;k]$

6.1.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Gleichmäßige Stetigkeit

Aufgabe 59: Gleichmäßige Stetigkeit

1. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?
2. Muss jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch beschränkt sein, d.h. gibt es dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Beweis oder Gegenbeispiel)?
3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit
$$|f(x)| \leq C(|x|+1) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$
4. Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom von mindestens zweitem Grad nicht gleichmäßig stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 60: Stetigkeit der Wurzelfunktion

1. Beweisen Sie die folgende Ungleichung
$$a, b \geq 0 \Longrightarrow \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a \pm b|} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \text{(W)}$$
2. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im ihrem Definitionsbereich stetig ist.
3. Ist f in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig?

Aufgabe 61: Gleichmäßige Stetigkeit

Ist die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig

1. auf dem Intervall $(0, 1]$;
2. auf den Intervallen $(a, 1]$, $(a \in (0, 1))$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 62: Untersuchungen auf gleichmäßige Stetigkeit

Sind die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen gleichmäßig stetig?

1. $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$.
2. $f_2(x) = \sin(1/x)$, $x \in [0, 1]$.
3. $f_3(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$.
4. $f_4(x) = (1 + x)^{-1}$, $x \in [0, +\infty)$.

Singularitäten

Aufgabe 63: wesentliche Singularität

Es werde im Intervall $(0, 1)$ eine reelle Funktion $f = f(x)$ durch die Vorschrift

$$f(x) = n(n+1)x - n \quad \text{für} \quad x \in [1/(n+1), 1/n), \; n = 1, 2, \ldots$$

definiert. Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to +0} f(x)$ und welchen Wert hat er gegebenenfalls?

Stetigkeitsuntersuchungen

Aufgabe 64: Beschränktes Wachstum

Eine reelle Funktion $f = f(x)$ sei für hinreichend große $x \in \mathbb{R}$ definiert und in jedem endlichen Intervall $I \subset \mathcal{D}(\{)$ gleichmäßig beschränkt. Ferner gelte mit einem reellen $q > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(qx) - f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{a}{q-1}.$$

Aufgabe 65: Untersuche auf Stetigkeit

Untersuche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q, \in \mathbb{N}, \text{ sowie } p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

auf Stetigkeit

Aufgabe 66: Untersuche auf Stetigkeit

Die abzählbare Menge der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$ werde als eine unendliche Folge $\{r_n\}_{n\geq 1}$ geschrieben. Mit der Bezeichnung

$$A(x) = \{n|n \in \mathbb{N}, r_n \leq x\} \quad \text{für} \quad x \in I$$

definieren wir die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n\in A(x)} \frac{1}{2^n}.$$

Beweisen Sie:

1. Die Funktion f ist auf I monoton wachsend.
2. Die Funktion f ist an den irrationalen Stellen in I stetig und an den rationalen Stellen in I unstetig.

Aufgabe 67: Stetigkeit der Betragsfunktion

Sei I ein offenes Intervall. Sind f und g auf I definiert, so setzen wir $F(x) := \max\{f(x); g(x)\}$, $(x \in I)$.

1. Es sei f stetig auf I. Zeigen Sie, dass dann $|f|$ ebenfalls stetig auf I ist.
2. Seien f und g stetig auf I. Zeigen Sie, dass dann auch F stetig auf I ist.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Formel

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right).$$

Aufgabe 68: Stetigkeit der Wurzelfunktion

1. Beweisen Sie die folgende Ungleichung

$$a, b \geq 0 \Longrightarrow \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a \pm b|} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \text{(W)}$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im ihrem Definitionsbereich stetig ist.

3. Ist f in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig?

Stetigkeit des Maximus und von $|Aufgabe69 : f(x)|$.

Seien f und g auf einem offenen Intervall I definiert, das einen Punkt x_0 enthält. Ferner seien f und g stetig in x_0, und wir definieren

$$F(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad (x \in I).$$

1. Man zeige, dass die Funktion F stetig in x_0 ist.

2. Man benutze a), um zu zeigen, dass $|f|$ stetig in x_0 ist.

unbestimmte Ausdrücke

Aufgabe 70: Binomischer Satz

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x+3)^{13}(4x-1)^7}{(5x-2014)^{20}}\ .$

Aufgabe 71: Unbestimmte Ausdrücke

Berechnen Sie für natürliche Zahlen p_1, p_2, q_1, q_2 die Grenzwerte

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^{p_1}-1}{x^{p_2}-1},$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{q_1}}-1}{x^{\frac{1}{q_2}}-1},$$

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{p_1}{q_1}}-1}{x^{\frac{p_2}{q_2}}-1}.$$

Hinweis: Verallgemeinerte dritte binomische Formel

6.1.3 Integralrechnung

bestimmte Integrale

Anwendungen

Aufgabe 72: Eine Aufgabe mitten aus dem fröhlichen (Studenten-)Leben.

Eine gewisse Menge an Bier wird in einer stehenden kreiszylinderförmigen Tonne vom Radius r bzw. einem kreiskegelstumpfförmigen Behälter mit dem Radius r am Boden und Radius $R > r$ in der Höhe $H > 0$ gelagert. In die Böden wird jeweils ein Zapfhahn mit dem gleichen Querschnitt eingeschlagen. Aus welchem Behälter ist die gleiche Menge Bier bei geöffnetem Zapfhahn schneller vollständig ausgelaufen? Hinweis: Benutzen Sie Torricelli's Ausflußgesetz (benannt nach dem Mathematiker und Physiker Evangelista Torricelli, 1608-1647), wonach die Ausflußgeschwindigkeit v einer idealen Flüssigkeit (Bier?) durch eine nach unten gerichtete Öffnung sich proportional zur Höhe h der Flüssigkeit verhält, genauer $v = \sqrt{Gh}, G$ Gravitationskonstante. Leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für die Flüssigkeitshöhe $h(t)$ zur Zeit t in beiden Fällen ab und diskutieren Sie diese.

Aufgabe 73: Welches Gefäß läuft zuerst leer?

Eine Übung zur Integration

Wir betrachten eine bis zum Rand mit Wasser gefüllte Halbkugel vom Radius r. Daneben stehen ebenfalls bis zum Rand gefüllte Gefäße, und zwar

1. ein Zylinder vom Radius r,
2. ein auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel mit Öffnungswinkel $90°$ und
3. ein ebensolcher Kreiskegel, der aber auf seiner Grundfläche steht.

1. Wie hoch sind die beschriebenen Gefäße, wenn alle die gleiche Wassermenge enthalten?

An den Gefäßen werden Öffnungen so angebracht, dass die Ausflussgeschwindigkeit[a] v des Wassers nur noch von der Höhe y der Wassersäule abhängt; in allen Gefäßen sei also $v = a\sqrt{y}$ mit ein und derselben Konstanten a.

2. In welcher Reihenfolge laufen die Gefäße leer?

[a] Die Ausflussgeschwindigkeit hängt i.a. von der Größe und Form der Öffnung, von der Form des Gefäßes, von der Viskosität der Flüssigkeit und von der Höhe y des Flüssigkeitsspiegels ab. Bis auf die letzte Abhängigkeit seien alle anderen durch Form und Größe der Ausflussöffnung so berücksichtigt, dass sie in einer Konstanten a zusammengefasst werden können.

Aufgabe 74: Integralabschätzungen

Zeige

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} < \frac{\pi}{6}, \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x + x^3}} < \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 75: Integrand mit Beträgen

Berechne

$$\int_0^3 \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}\,dx.$$

Aufgabe 76: Rekursionsformel

Berechne

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Hinweis: Zeige zunächst $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$.

Aufgabe 77: Substitutionstrick

1. Berechnen Sie durch die Substitution $x = \pi - y$ das Integral
$$I_1 = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$
2. Versuchen Sie die gleiche Substitution bei dem Integral
$$I_2 = \int_0^\pi \frac{x \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx.$$
3. Berechnen Sie das Integral in I_1 durch partielle Integration.
4. Berechnen Sie das Integral in I_2 anders.

Cauchy-Integral

Aufgabe 78: Cauchy-Integrierbarkeit monotoner Funktionen

Es sei $f(x) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ in $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, $(k \in \mathbb{N})$, und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass f auf $[0, 1]$ monoton wachsend ist. Approximieren Sie f durch Treppenfunktionen, um das Integral von f über $[0, 1]$ zu berechnen.

einfache Berechnungen

Rotationsflächen

Aufgabe 79: Oberfläche von Rotationskörpern

Berechne den Inhalt der Oberfläche des durch Rotation der Kurve $y(x) = 1 - x^2,\ |x| \le 1$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 80: Oberfläche der Kugel

Berechne den Inhalt der Oberfläche des durch Rotation der Kurve $(x, \sqrt{R^2 - x^2}),\ |x| \le R$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 81: Oberfläche Eines Rotationellipsoides

Berechne den Inhalt der Oberfläche eines Rotationsellipsoides
$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$
d. h. des durch Rotation der Kurve $(x, \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - x^2}),\ |x| \le c$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers.

Rotationskörper

Aufgabe 82: Höhe eines Rotationsellpsoides bei gegebenem Volumen

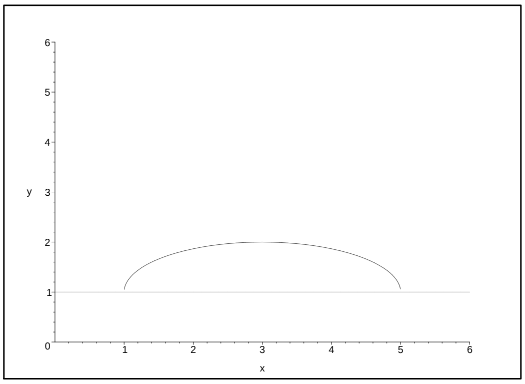
Das Innere eines Glases soll die Form eines Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ haben. Berechne die Höhe h (des Inneren), die es haben muss, wenn es 0,5 Liter fassen soll, mittels

1. Volumenberechnung durch Integration im $\mathbb{R}^3$,
2. Guldinscher Regel.

Aufgabe 83: Ringe als Rotationskörper

$$M := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 5,\\ 1 \le y \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5}\Big\}$$

Man berechne das Volumen des Körpers K, der bei Rotation des Gebietes M um die x-Achse bzw. um die y-Achse entsteht.

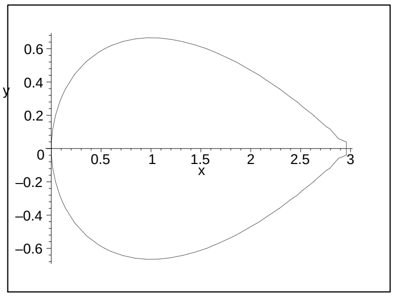


Aufgabe 84: Eine Aufgabe - 3 Lösungen

Man berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation der durch die Kurve

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9y^2 - x(3-x)^2 = 0, 0 \le x \le 3\}$$

begrenzten Fläche um die y-Achse entsteht.



Theorie

Aufgabe 85: ausgezeichnete Zerlegungsfolge

Man zeige, daß die Vorschrift

$$Z_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_n^{(n)} = b$$

mit

$$x_\nu^{(n)} = aq_n^\nu; \quad \nu = 0, 1, ..., n, \quad q_n = (b/a)^{\frac{1}{n}} > 1$$

eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge des Intervalls $[a, b]$ definiert!

Aufgabe 86: Konvexe Hülle

Bekanntlicherweise nennt man eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ komplexe Ebene) *konvex,* wenn sie mit je zwei Punkten $z_1, z_2 \in K$ auch die Verbindungsstrecke $[z_1, z_2] \equiv \{z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ der beiden Punkte enthält. Ist $E \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, dann heißt

$$\operatorname{conv} E = \cap \{K : K\ (\subset \mathbb{C}) \text{ konvex, } K \supset E\}$$

ihre konvexe Hülle. Offenbar ist $\operatorname{conv} E$ die kleinste konvexe Menge, die E umfaßt. Man zeige:

$$\operatorname{conv} E = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, z_i \in E, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die in der Klammer beschriebenen Linearkombinationen $\sum \lambda_i z_i$ heißen Konvexkombinationen der Punkte $z_1, ..., z_n$.

Aufgabe 87: Nicht Riemann-integrierbare Funktion, die Stammfunktion besitzt.

1. Zeigen Sie: Die Funktion $F : [0,1] \to R$ mit

$$F(x) := \begin{cases} \sqrt{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   ist für alle $x \in [0,1]$ differenzierbar.

2. Berechnen Sie die Ableitung $f := F'$ und zeigen Sie, dass f nicht R-integrierbar ist.

Mit anderen Worten: Die Funktion $f(x)$ hat zwar eine Stammfunktion, ist aber nicht R-integrierbar.

Aufgabe 88: Vereinfachtes Konvergenzkriterium

Man beweise die folgende Modifikation der Konvergenzbedingung für Riemannsche Zwischensummen:

$$\exists \lim \sigma(Z,T) = A \quad \text{gdw.} \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists Z_0\ \forall T : |\sigma(Z_0,T) - A| < \varepsilon; \tag{6.1}$$

die Zwischenpunktsysteme T sind natürlich zu Z_0 zu bilden.

Verbal bedeutet die Aussage, dass es für den Nachweis der Existenz des Integrals genügt, nur eine einzige Zerlegung Z_0 zu finden, so dass für jede Wahl von Zwischenpunkten T die Abschätzung in (6.1) gilt.

Hinweis: Man beweise zunächst folgenden Hilfsatz:

Für $E_1, ..., E_N \subset \mathbb{C}$ folgt aus

$$\forall z_\nu \in E_\nu : \left|\sum_{\nu=1}^{N} z_\nu\right| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

sogar

$$\forall w_\nu \in \operatorname{conv} E_\nu : \left|\sum_{\nu=1}^{N} w_\nu\right| < \varepsilon.$$

Dabei ist

$$\operatorname{conv} E = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, z_i \in E, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $z_1, ..., z_n$.

uneigentliche Integrale

Aufgabe 89: Uneigentliches Integral

Existiert $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\, dx$?

Aufgabe 90: Existenz uneigentlicher Integrale

Bestimmen Sie, für welche positiven Zahlen p die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^p \, dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} \, dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^\infty (\log x)^{-p} \, dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^\infty \sin(x^p) \, dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 + \mathrm{e}^x}{(\sin x)^p} \, dx$

Aufgabe 91: Uneigentliche Integrale und Regel von de l'Hospital

Es sei f integrierbar auf $[0, b]$ für alle $b > 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = A, (A \in \mathbb{R})$, und $a > -1$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x^{-a-1} \int_0^x f(t) \, t^a \, dt.$$

Aufgabe 92: Vergleichskriterien für uneigentliche Integrale

Es seien f und g integrierbar auf $[a, b]$ für jedes b mit $b > a$.
Beweisen Sie

1. Wenn $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \ge a$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x) \, dx < +\infty$ gilt, so konvergiert $\displaystyle\int_a^\infty f(x) \, dx$ absolut.
2. Wenn $0 \le f(x) \le g(x)$ für alle $x \ge a$ und $\displaystyle\int_a^\infty f(x) \, dx = +\infty$ gilt, so ist auch $\displaystyle\int_a^\infty g(x) \, dx = +\infty$.

Aufgabe 93: Vergleichskriterien für uneigentliche Integrale

Es seien $b > 0$ und f integrierbar auf $[\varepsilon, b]$ für alle $\varepsilon \in (0; b)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist $|f(x)| \leq Mx^{-p}$ für $x \in (0; b]$, mit Zahlen $p \in (0; 1)$ und $M > 0$, so konvergiert $\displaystyle\int_0^b f(x)dx$ absolut.

2. Ist $f(x) \geq Mx^{-p}$ für $x \in (0; b]$, mit Zahlen $p \geq 1$ und $M > 0$, so ist $\displaystyle\int_0^b f(x)dx = +infty$.

Riemann-Stieltjes-Integral

Aufgabe 94: Existent des Riemann-Stieltes-Integrals bei Sprüngen

Seien $\alpha, f_1, f_2 : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ und

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x \leq 1 \\ 4 & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x < 1 \\ 4 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

Existieren die Riemann-Stieltjes-Integrale

$$\int_0^2 f_i(x)\, d\alpha \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \; ?$$

unbestimmte Integrale

Partialbruchzerlegung

Aufgabe 95: einfache Nullstellen

Man bestimme

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6}\, dx.$$

Aufgabe 96: Mehrfache komplexe Nullstellen

1. Zeigen Sie, dass im Falle mehrfacher komplexer Nullstellen der Ansatz

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^k} = \frac{Ax+B}{(x^2+\beta^2)^{k-1}} + C\int \frac{dx}{(x^2+\beta^2)^{k-1}}$$

   mit

$$A = \frac{1}{2\beta^2(k-1)}, B = 0, C = \frac{2k-3}{2\beta^2(k-1)}$$

   zum Erfolg führt ($k = 2, 3...$).

   Hinweis: Differenzieren, Multiplikation mit $(x^2+\beta^2)^k$, Koeffizientenvergleich.

2. Berechnen Sie mit dieser Methode

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Aufgabe 97: Mehrfache Nullstellen

Man bestimme

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx.$$

Aufgabe 98: Quadratisch irreduzibler Nenner

Man bestimme

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx.$$

Aufgabe 99: Partialbruchzerlegungen

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{3x^3 + 5x^2 - 25x - 1}{(x+2)(x-1)^2}\, dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{3x^3 - x^2 - 4x + 13}{x^4 - 4x^3 + 13x^2}\, dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\, dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}\, dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx$

Partielle Integration

Aufgabe 100: Rekursion für $\int x^n \sin x\, dx$

Beweisen Sie die Beziehung

$$S(n) := \int x^n \sin x\, dx = -\sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} x^{n-k} \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) + c,$$

und stellen Sie eine analoge Formel für $C(n) = \int x^n \cos x\, dx$ auf!

Stammfunktionen

Aufgabe 101: Bestimmung von Stammfunktionen

Man berechne die Stammfunktionen zu

1. $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx,$
2. $\displaystyle\int x \ln(x^2)\, dx,$
3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\, dx,$
4. $\displaystyle\int x(ax^2+b)^k\, dx,\ (a > 0, b > 0, k \in \mathbb{R}).$

Substitution

Aufgabe 102: Integration rationaler Ausdrücke in $\sin x$ und $\cos x$

1. Es bezeichne $R = R(u, v)$ eine beliebige rationale Funktion von zwei Variablen u, v. Zeigen Sie, dass sich Integrale vom Typ
$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$
durch die Substitution $t = \tan(x/2)$ auf die Berechnung von unbestimmten Integralen über rationale Funktionen zurückführen lassen.

2. Berechnen Sie mit dieser Methode die Integrale
$$\text{i)} \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \qquad \text{ii)} \quad \int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx$$

6.1.4 Spezielle Funktionen

Aufgabe 103: Identitäten

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen :

1. $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $(x \in [1, +\infty))$.
2. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $(x \in [-1, +1])$.
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$, $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ x, y > 0)$.

6.2 mehrerer Variabler

6.2.1 Differentialrechnung

partielle Ableitungen

Anwendungen

Aufgabe 104: Parameterintegrale

Berechne die Ableitung der Funktion
$$g(t) = \int_{\sqrt{t}}^{t^2} \ln(tx)\, dx$$
direkt und mit der Formel für Parameterintegrale.

Existenz und Berechnung

Aufgabe 105: Partielle Ableitungen

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Funktion $f = f(x,y)$ mit den Funktionswerten

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{\cos(x+y)} \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 106: Totale Ableitung I

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle (stetige) und totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$!

Aufgabe 107: Totale Ableitung II

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle (stetige) und totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$!

Aufgabe 108: Totale Ableitung III

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle (stetige) und totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$!

Aufgabe 109: Totale Ableitung IV

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle (stetige) und totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$auf Stetigkeit, partielle (stetige) und totale Differenzierbarkeit in $(0,0)$!

Aufgabe 110: Totale Ableitung und Richtungsableitung

Sei $f(0,0) = 0$ und
$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

1. Zeigen Sie, dass f_x und f_y überall existieren und beschränkt auf $\mathbb{R}^2$ sind.
2. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, ($u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$), existieren, und dass ihr Absolutwert nicht größer als 1 ist.
3. * Zeigen Sie, dass andererseits f nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Taylorentwicklung

Aufgabe 111: Taylorentwicklung von $f(x,y,z) = \sin(x+y)\cos(xy)\cosh z$.

1. Berechne das Taylorpolynom $T_2(x,y,z)$ zweiter Ordnung für $f(x,y,z) = \sin(x+y)\cos(xy)\cosh z$ im Punkt $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$.
2. Bestimme ein $r > 0$ so, dass $|f(x,y,z) - T_2(x,y,z)| < 10^{-5}$ für $\|(x,y,z)\|_\infty < 10^{-r}$ ist.

Aufgabe 112: Taylorentwicklung von x^y.

Berechne das Taylorpolynom für $f(x,y) = x^y$ im Punkt $(x_0,y_0) = (1,1)$ einschließlich der quadratischen Glieder.

Kapitel 7

Induktion

Aufgabe 113: Abschätzungen von $n!$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$

1. $3\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$
2. $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n!$
3. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Aufgabe 114: Abzählbarkeit von Teilmengen von $\mathbb{N}$

Sei M eine Menge und $f : M \mapsto \mathbb{N},\ g : M \mapsto \mathbb{N}$ gegeben, so dass f surjektiv und g injektiv ist. Man konstruiere (mit vollständiger Induktion) eine bijektive Abbildung $h : M \mapsto \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeige

1. $g(M)$ ist unbeschränkt
2. für eine unbeschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt es eine Bijektion $b : A \mapsto \mathbb{N}$.

Aufgabe 115: allgemeine Binomialkoeffizienten

Für dien gewöhnlichen Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ erhält man für $m, n \in \mathbb{N}$ durch Kürzen mit $(m-n)!$ auch

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

In dieser Form muss nun m nicht mehr notwendig eine natürliche Zahl sein.
Dementsprechend kann man für $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ einen „verallgemeinerten" Binomialkoeffizienten definieren durch

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Man zeige:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ n-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 116: Summe über Cosinusfunktionen

Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 117: Existenz und Berechnung der n-ten Wurzel

Sei $x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x, 0 < y < 1,\ y < x$ und $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Die Abbildungen $f_+, f_- : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert

$$f_-(0) = y, \quad f_-(n+1) = f_-(n) + h(f_-(n)), \quad f_+(n) = f_-(n) + g(f_-(n)),$$

wobei für $z > 0$

$$h(z) = \min\left\{1, \frac{x - z^p}{p(z+1)^{p-1}}\right\}, \quad g(z) = \frac{x - z^p}{p z^{p-1}}.$$

Zeige

$$f_-(n) \le f_-(n+1) \le f_+(m), \quad \forall_{n,m}$$

und beweise damit

$$\sup f_-(\mathbb{N}) = \inf\{\sup\{f_+(m) \,|\, m > k\} \,|\, k \in \mathbb{N}\} = \sqrt[p]{x}$$

.

Aufgabe 118: Indexverschiebung

Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n!$$

Aufgabe 119: Zeige:

Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Aufgabe 120: Summe über Sinusfunktionen

Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

Aufgabe 121: Summenformel für Binomialkoeffizienten

Man beweise für $a \in \mathbb{R}$ mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a+k}{k} = \binom{a+n+1}{n}.$$

Aufgabe 122: Verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_i \geq -1$ und $a_i a_j \geq 0$ für $i, j = 1, \ldots, n$.
Welchen Ungleichungstyp erhält man im Spezialfall $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$?

Aufgabe 123: Schritt von n auf $n + 2$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^n \tag{7.1}$$

für jede fest gewählte natürliche Zahl n unendlich viele Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ besitzt.

Kapitel 8

reelle Zahlen

8.1 p-adische Zahlen

Aufgabe 124: a-Brüche

Einem gegebenen a-Bruch $(z_1 z_2 \ldots z_h, z_{h+1} \ldots)_a$ wird die Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots$ mit

$$(*) \qquad a_n := \sum_{i=1}^{n} z_i a^{h-i}, \quad b_n := a_n + a^{h-n}$$

zugeordnet.

1. Bestimmen Sie für den Dualbruch $(1010, 101010\ldots)_2$ diese Intervallschachtelung und die eindeutig bestimmte reelle Zahl, die allen diesen Intervallen angehört.
2. Zu jeder reellen Zahl x > 0 existiert ein a-Bruch, so dass $x \in [a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}$ mit a_n, b_n entsprechend (*) gilt. Zeigen Sie, dass für die Ziffern z_n dann auch die folgende Beziehung gilt:
$$z_n = \left\lfloor x a^{n-h} \right\rfloor - a \left\lfloor x a^{n-h-1} \right\rfloor .$$
(Hierbei bezeichnet $\lfloor y \rfloor$ den ganzen Anteil einer reellen Zahl y.)
3. Bestimmen Sie die (periodischen) a-Bruchentwicklungen der Zahlen $z = 1/(a-1)^2$ für $a = 3, 4, 5, 6, 7$. Welche Vermutung ergibt sich für den Fall eines beliebigen $a \in \mathbb{N},\ a \geq 2$? Versuchen Sie, Ihre Vermutung zu beweisen.

Aufgabe 125: Abzählbarkeit von Teilmengen von $\mathbb{N}$

Beweisen Sie: Die Menger aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Gilt das auch für die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$?

Kapitel 9

Unendliche Reihen

9.1 Fourierreihen

Aufgabe 126: Entwicklung

Entwickle

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{in} \quad (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, 2\pi) \\ \pi & \text{in} \quad (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

in eine Fourierreihe nach den Funktionen $\cos nx, \sin nx$. Skiziere den Verlauf der ersten Partialsummen.

9.2 geometrische Reihen

Aufgabe 127: Fibonacci-Koeffizienten

Entwickeln Sie die Funktion $f = f(z)$ mit

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

an der Stelle $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zeigen Sie die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_0 = a_1 = 1, \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

(Fibonacci-Zahlen) und geben Sie die Koeffzienten a_n explizit an. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?

Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen z_1, z_2 des Nenners von f, schreiben Sie f in der Form

$$f(z) = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}$$

mit geeigneten Zahlen a, b und benutzen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe.

Aufgabe 128: komplexe geometrische Reihe

Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z^2 > -\frac{1}{2}$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1+z^2)^{n-1}}$$

und bestimmen Sie deren Summe.

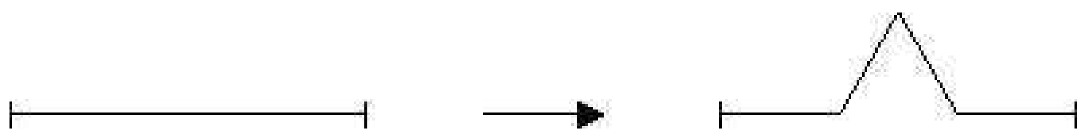
Aufgabe 129: Potenzen der geometrischen Reihe

Man beweise unter Verwendung der Cauchyschen Produktreihe mit vollständiger Induktion über l:

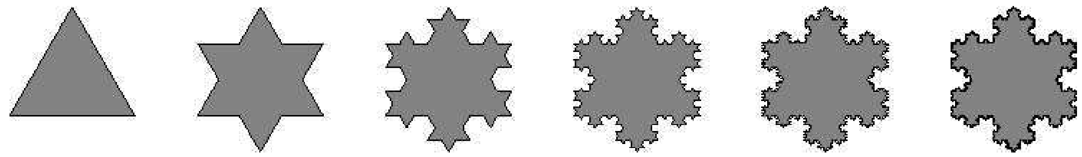
$$|z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{(1-z)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{l-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n} z^n.$$

Aufgabe 130: Volumen und Umfang der Koch-Schneeflocke

Ersetzt man in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 die Kanten rekursiv gemäß der Vorschrift



enstehen nacheinander die folgenden Figuren:



Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt aller dieser Figuren. Was passiert, wenn dieser Prozess unendlich oft fortgeführt wird?

9.3 Großer Umordnungssatz

9.3.1 Cauchysche Produktreihe

Aufgabe 131: Potenzen der geometrischen Reihe

Man beweise unter Verwendung der Cauchyschen Produktreihe mit vollständiger Induktion über l:

$$|z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{(1-z)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{l-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n} z^n.$$

Aufgabe 132: Übungen zur Quadratwurzel

1. Beweisen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Produktreihe für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ die Beziehung
$$\frac{1}{1+z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n \right)^2 .$$
2. Unter Verwendung von a) zeige man
$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} 50^{-n}.$$

Aufgabe 133: Endliche Zeilenreihen

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent und für $n = 0, 1, \ldots$ werde gesetzt:
$$b_n = \frac{1}{2n+1} \left(a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n \right).$$
Zeigen Sie, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert und
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
gilt. Hinweis: Wenden Sie den Großen Umordnungssatz an!

Aufgabe 134: Die Lambert-Reihe

1. Beweisen Sie: Die Lambert[a]-Reihe
$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}, \quad z \in \mathbb{C}$$
konvergiert für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.
2. Zeigen Sie die Identität
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, z^n,$$
wobei $d(n)$ die Anzahl der (echten und unechten) Teiler von n bezeichnet.
3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die rechte Reihe.
4. Beweisen Sie die Identität
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

[a] Johann Heinrich Lambert (* 26. August 1728 in Mülhausen (Elsass); † 25. September 1777 in Berlin) war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung, der u. a. die Irrationalität der Zahl π bewies.

9.4 konkrete Reihen

Aufgabe 135: Binomische Reihe

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Binomial-Koeffzienten sind durch
$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n!}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$
und die binomische Reihe als
$$S_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad (z \in \mathbb{C}),$$
definiert. Zeigen Sie,

1. dass die Reihe für $|z| < 1$ konvergiert.
2. dass im Falle von $\alpha = m \in \mathbb{N}$ die Reihe nur endlich viele Glieder hat und
$$S_m(z) = (1+z)^m$$
gilt.

Aufgabe 136: Definition und Berechnung von e.

Betrachte die rellen Folgen $\{a_n\}$ und $\{s_n\}$ mit

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad \text{und} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Definiere $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} s_n$. Warum ist dies wohldefiniert?

a) Zeige: $a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{1}{n^k}$ und $a_n \leq s_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$.

b) Folgere: $\{a_n\}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{e}$.

c) Zeige: Für alle $m > n$ gilt

$$a_m \geq 1 + 1 + (1 - \frac{1}{m})\frac{1}{2!} + \cdots + (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \ldots (1 - \frac{n-1}{m})\frac{1}{n!}.$$

d) Folgere $\lim_{n\to\infty} a_n \geq s_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \mathrm{e}$. Also $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

Diese Aufgabe zeigt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$, die sogenannte Eulersche Zahl.

Versuche die Zahl e jeweils mit a_n und s_n zu approximieren. Wie groß muß jeweils $n \in \mathbb{N}$ sein, um e mit fünf Dezimalen genau zu berechnen?

Aufgabe 137: Die Lambert-Reihe

1. Beweisen Sie: Die Lambert[a]-Reihe

$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

konvergiert für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

2. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, z^n,$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der (echten und unechten) Teiler von n bezeichnet.

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die rechte Reihe.

4. Beweisen Sie die Identität

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

[a] Johann Heinrich Lambert (* 26. August 1728 in Mülhausen (Elsass); † 25. September 1777 in Berlin) war ein schweizerisch-elsässischer Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung, der u. a. die Irrationalität der Zahl π bewies.

Aufgabe 138: Teleskopreihen

1. Entscheiden Sie über Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Summen der Reihen

   (a) $S_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$,

   (b) $S_2 := \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots$,

   (c) $S_3 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$.

2. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+b+n)} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+b-1}\right).$$

   Welche Werte von a, b können dabei zugelassen werden?

9.5 Leibniz-Reihen

Aufgabe 139: Binomialkoeffizienten

Zeigen Sie mit Hilfe des Kriteriums von Leibniz, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n}$$

für jedes reelle $a \in (-1, 0)$ konvergiert.

Aufgabe 140: Leibniz-Reihe

Untersuchen Sie auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

Aufgabe 141: Monotonie erfoderlich

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz / Divergenz !

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{(3+(-1)^n)\, n}.$$

9.6 Potenzreihen

Aufgabe 142: Fast harmonische Reihen

Es sei $\{a_n\}_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Man zeige:

Die Summe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

konvergiert für alle z mit $|z| \leq 1$, mit Ausnahme von vielleicht $z = 1$!

Aufgabe 143: Identitätssatz für Potenzreihen

1. Die Potenzreihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe einen positiven Konvergenzradius ρ. In jedem Punkt des Konvergenzkreises gelte $P(z) = P(-z)$. Zeigen Sie, dass dann $a_n = 0$ für alle ungeraden n gilt.

2. Gibt es Potenzreihen $P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 1$, die in den Punkten $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ der Reihe nach die Werte

$$\text{i)}\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \quad \text{bzw.} \quad \text{ii)}\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$$

annehmen?

9.6.1 Konvergenzradius

Aufgabe 144: fehlende Exponenten

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}(z-5)^{2n+1}.$$

Aufgabe 145: Formel von Hadamar

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit den Koeffizienten $a_n = 3^n$ (n gerade) und $a_n = 5^n$ (n ungerade) in Abhängigkeit von der reellen Zahl x.

Aufgabe 146: Formel von Hadamar II

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit den Koeffizienten $a_{2n} = 3^n$ und $a_{2n+1} = 5^n$ in Abhängigkeit von der reellen Zahl x.

Aufgabe 147: Konvergenzradiusbestimmung

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen in Potenzen von z:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}^n}, \text{ d) } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{n} z^n, \ (a \in \mathbb{C})$$

Aufgabe 148: Potenzfunktion vesus Exponentialfunktion

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{2012} + 3^n) z^n$$

Aufgabe 149: Quotientenkriterium versus Wurzelkriterium

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n + \frac{1}{n}\right) (z - z_0)^n.$$

Untersuchen Sie die Reihe

1. zunächst mit dem Quotientkriterium,
2. dann mit dem Wurzelkriterium und
3. benutzen Sie zuletzt die Formel für den Konvergenzradius.

Aufgabe 150: Satz von Cauchy-Hadamar

Es sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n.$$

Welchen Konvergenzradius haben dann die Potenzreihen

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, n! \, z^n, \;\; S_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \, z^n, \;\; S_3 := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, n^m \, z^n, \;\; S_4 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^m} \, z^n \;\; (m \in \mathbb{N})?$$

9.7 Quotientenkriterium

Aufgabe 151: Konvergenzuntersuchung

Untersuchen Sie die folgenden drei Reihen auf Konvergenz oder Divergenz

$$\text{a)} \;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \text{b)} \;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{n^n}, \quad \text{c)} \;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \, n!}{n^n}.$$

9.8 Vergleichskriterium

Aufgabe 152: Reihen mit der Eulerschen Zahl

Untersuchen Sie die Konvergenz der folegnden Reihen

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^2$$

Hinweis: Vergleichskriterium

Aufgabe 153: gebrochen rationale Summanden

Es seien a, b beliebige positive (reelle) Zahlen. Für welche (rationalen) Werte von s, t konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a + n^s}{b + n^t} \; ?$$

9.9 weitere Summationsverfahren

Aufgabe 154: Partielle Summation

Manchmal kann man die sogenannte partielle Summation für Konvergenzuntersuchungen von unendlichen Reihen benutzen: Sind $a_1, \dots, a_n,\ \ b_1, \dots, b_n \ \in \ \mathbb{C}$ und ist $A_m := \sum_{k=1}^{m} a_k,\ m = 1, \dots .n$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

1. Beweisen Sie diese Formel.
2. Zeigen Sie damit: Hat die reelle, unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ beschränkte Partialsummen und ist die reelle Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Kapitel 10

Ungleichungen

10.1 Bernoulli-Ungleichung

Aufgabe 155: Bernoulli-Ungleichung

Es seien $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, und $x \geq -1$. Benutzen Sie den Mittelwertsatz um die folgenden Ungleichungen zu zeigen:

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\leq 1 + ax \quad \text{wenn} \;\; 0 < a < 1 \\ (1+x)^a &\geq 1 + ax \quad \text{wenn} \;\; a < 0 \;\; \text{oder} \;\; a > 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 156: Bernoulli-Ungleichung für rationale Exponenten

Beweisen Sie die folgenden beiden Varianten der Bernoullischen Ungleichung. Dazu sei $x > -1$ eine reelle Zahl und a eine rationale Zahl.

1. Es gilt $(1+x)^a \geq 1 + ax$ für $a \geq 1$.
2. Es gilt $(1+x)^a \leq 1 + ax$ für $0 < a < 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz über das geometrische und das arithmetische Mittel.

10.2 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Aufgabe 157: Disjunkte Kreise

Es seien x, y reelle Zahlen, für die

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = 4$$

gilt. Zeigen Sie:

$$x^2 + y^2 > 36.$$

Aufgabe 158: Gegebene Summe und Quadratsumme

Es sei

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 &= 25 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann $0 \le x_i \le 4,\ i = 1, \dots, 5$ gilt.
In welchen Fällen können dabei Gleichheitszeichen auftreten?

Aufgabe 159: Lagrangesche Identität

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_k, w_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die sogenannte LAGRANGEsche Identität

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 - \sum_{1 \le l < k \le n} |z_l \bar{w}_k - z_k \bar{w}_l|^2$$

und daraus folgend die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für komplexe Zahlen

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 .$$

10.3 Dreiecksungleichung

Aufgabe 160: Abschätzung zusammengesetzter Größen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $|a + 1| \le 10^{-2}$ und $|b - 5| \le 3 \cdot 10^{-2}$.

Schätze die Größen $|a + b - 4|$, $|ab^2 + 25|$, $|(b/a) + 5|$ und $|a\sqrt{b} + \sqrt{5}|$ ab.

Aufgabe 161: Abschätzung nach der Dreiecksungleichung

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $|a - 3| \le 3 \cdot 10^{-3},\ |b + 2| \le 2 \cdot 10^{-3}$.
Schätzen Sie die folgenden Ausdrücke ab:

$$a)\ |a + b - 1|\,,\ b)\ |ab + 6|\,,\ c)\ \left|a^2 b + 18\right|,\ d)\ \left|\frac{a}{b} + \frac{3}{2}\right|,\ e)\ \left|\sqrt{a} - \sqrt{3}\right|.$$

Aufgabe 162: Stetigkeit der Wurzelfunktion

1. Beweisen Sie die folgende Ungleichung
$$a, b \geq 0 \Longrightarrow \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a \pm b|} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \text{(W)}$$
2. Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im ihrem Definitionsbereich stetig ist.
3. Ist f in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig?

10.4 Mittelungleichung

Aufgabe 163: Zyklisches Produkt

Gegeben seinen n positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

1. Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine beliebige Umordnung der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Man beweise
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k} \geq n.$$
2. Sei $x_{k+1} := x_1$ gesetzt. Man beweise
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^n.$$

10.5 Rechnen mit Ungleichungen

Aufgabe 164: Lösen von Ungleichungen

1. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \neq 1$, für die gilt:
$$\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}.$$
2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt
$$||x+1| - |x+3|| < 1.$$
3. Es sei $p > 0$ eine gegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p alle reellen Zahlen $x \neq 0$ mit
$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$
4. Es sei p eine gegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p alle reellen Zahlen x mit
$$p\,x\,(3-x) > 7\,p - 5.$$
5. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x mit
$$x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{2}\,x + 1.$$

Hinweis: Es ist lehrreich, sich mit Hilfe eines Zeichenprogramms (z.B. dem freien Gnuplot) eine Vorstellung vom Verlauf der Graphen der jeweiligen Funktionen zu verschaffen!

10.6 Tschebyscheffsche Ungleichung

Aufgabe 165: Tschebyscheffsche Ungleichung

1. Zeigen Sie die folgende Identität: Für $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ gilt
$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)(b_i - b_k) = 2\left\{n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\right\}$$
2. Leiten Sie aus a) die Tschebyscheffsche Ungleichung her: Ist $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, so gilt
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n}$$

10.7 weitere Abschätzungen

Abschätzung von $1/\sqrt{Aufgabe166:n}$

1. Beweisen Sie für jede natürliche Zahl n

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

2. Bestimmen Sie den größten ganzen Anteil $\lfloor x \rfloor$ der Zahl

$$x = \sum_{k=1}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

   Hinweis: Für eine reelle Zahl x ist der größte ganze Anteil die eindeutig bestimmte ganze Zahl $\lfloor x \rfloor =: m$ mit $m \leq x < m+1$. Benutzen Sie die Ungleichung aus a).

Teil III

Analytische Geometrie

Kapitel 11

Ebene Probleme

Aufgabe 167: Disjunkte Kreise

Es seien x, y reelle Zahlen, für die

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = 4$$

gilt. Zeigen Sie:

$$x^2 + y^2 > 36.$$

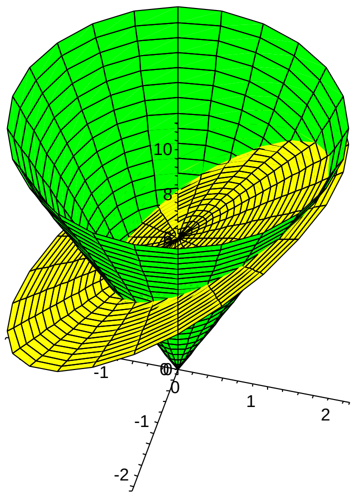
Kapitel 12

Kegelschnitte

Aufgabe 168: Kegelhalbierung

Ein gerader Kreiskegel mit Grundkreisradius r und Höhe h wird durch einen ebenen Schnitt im Winkel α zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile geteilt. (α sei dabei natürlich echt kleiner als der Mantelwinkel des Kegels, so dass als Schnittfläche eine Ellipse entsteht, deren Rand ganz auf dem Kegelmantel liegt.)

Wie groß ist die Schnittfläche und in welcher Höhe schneidet die Schnittebene die Kegelachse?



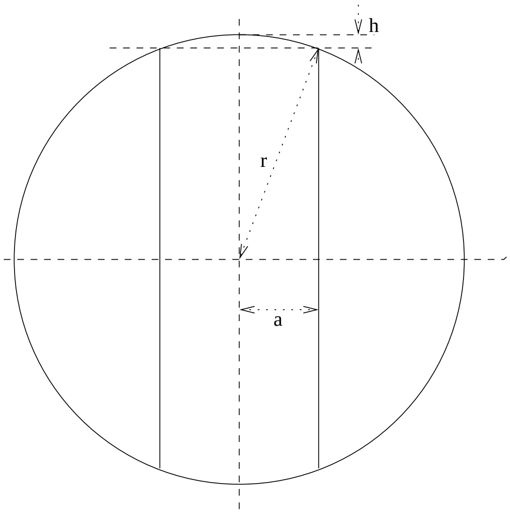
Kapitel 13

Kugelberechnungen

Aufgabe 169: Kugel mit Loch

In eine Kugel vom Radius r wird ein zylindrisches Loch vom Radius a so gebohrt, dass die Zylinderachse durch den Kugekmittelpunkt geht. Die Höhe des Loches beträgt 1 m.

Wie groß ist das Volumen des Restkörpers?



Kapitel 14

Polyeder

Aufgabe 170: Ortsvektorsumme im regulären Polyeder

Seien M der Mittelpunkt und $P_i, i = 1, \ldots, n$ die Eckpunkte eines regulären Polyeders. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{MP_k} = \vec{0}.$$

Teil IV

Funktionalanalysis

Kapitel 15

Metrik und Norm

Aufgabe 171: Beschränkte Metrik

1. Es sei(M, d) einmetrischer Raum mit dem Abstand $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}$ mit
$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
eine Metrik auf M ist.
(Man beachte, dasd stets $d_1(x, y) < 1$ ist.)
2. Erzeugt die Metrik d_1 die gleiche Topologie (d. h. das gleiche System der offenen und abgeschlossenen Mengen) auf M wie d ?

Aufgabe 172: Französische Eisenbahn-Metrik (Alle Züge fahren über Paris.)

Es sei $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf dem Raum $\mathbb{R}^2$.
Für $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, 2$ sei

$$\tilde{d}(z_1, z_2) = \begin{cases} d(z_1, z_2) & \text{falls} \quad x_1\, y_2 = x_2\, y_1 \\ d(z_1, 0) + d(0, z_2) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man gebe eine geometrische Deutung der Bedingung $x_1\, y_2 = x_2\, y_1$ an und untersuche, ob $\tilde{d}$ ebenfalls eine Metrik auf dem Raum $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 173: Matrixnorm

Im Vektorraum V der reellen $(n \times n)$-Matrizen $A = (a_{ij})$ werde gesetzt:

$$\|A\| := \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|.$$

1. Prüfen Sie die Normeigenschaften von $\|\cdot\|$ nach!
2. Ist $\|\cdot\|$ eine multiplikative Matrixnorm auf V, d.h. gilt

   $$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

   für beliebige Matrizen A, B aus V? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

3. Es sei M die Menge der invertierbaren unteren Dreiecksmatrizen aus V. Ist M eine offene Menge im normierten Raum $V, \| \cdot \|$? Bestimmen Sie alle Randpunkte von M!

Normen im $\mathbb{R}^{Aufgabe 174: 2}$

1. Untersuchen Sie, ob folgende Ausdrücke Normen im $\mathbb{R}^2$ sind und beschreiben Sie gegebenenfalls das Aussehen des Einheitskreises.
   (a) $\|(x_1, x_2)\| = |x_1 - x_2| + |x_1|$
   (b) $\|(x_1, x_2)\| = 2|x_1| + 3|x_2|$
   (c) $\|(x_1, x_2)\| = |x_1 - x_2|$
2. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Matrixnormen.

Aufgabe 175: reziproke Metrik in $\mathbb{N}$

Auf der Menge der natürlichen Zahlen werde gesetzt:

$$d(n, m) = \frac{|n - m|}{nm} \quad \text{für} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

1. Zeigen Sie, dass d eine Abstandsfunktion auf $(\mathbb{N}, d)$ ist.
2. Beschreiben Sie alle offenen, alle abgeschlossenen und alle kompakten Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.
3. Ist der metrische Raum $(\mathbb{N}, d)$ vollständig?

Teil V

Funktionentheorie

Kapitel 16

Gaußsche Integralformel

Aufgabe 176: Konjugierte Formel

Man berechne das Integral

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\bar{z} - z_0}$$

über dem Einheitskreis!

Kapitel 17

Gaußscher Integralsatz

Aufgabe 177: Fresnelschen Integrale

Berechnen Sie unter Verwendung des reellen Integrals

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1/2}\,du = \frac{\Gamma(1/2)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

die sogenannten Fresnelschen Integrale

$$I_c := \int_0^\infty \cos(t^2)\,dt \quad \text{und} \quad I_s := \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt,$$

indem Sie die in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ über den Rand des Kreissektors

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R; 0 < arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$$

integrieren, den Cauchyschen Integralsatz anwenden und schließlich den Grenzübergang $R \to \infty$ vollziehen.

Kapitel 18

komplexe Zahlen

18.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 178: Betrag und Argument

Berechnen Sie von den folgenden komplexen Zahlen jeweils den Betrag und (ein) Argument:

$$a)\ i^{2016}, \quad b)\ \frac{3+4i}{1-2i}, \quad c)\ (1+i)^{17} - (1-i)^{17}, \qquad (1-i)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 179: Beträge u. ä.

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit komplexen Zahlen:

1. $|2z_2 - 3z_1|^2$,
2. $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$,
3. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$,

wobei $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ und $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ ist. (Mit $\bar{z}$ wird die zu z konjugiert komplexe Zahl bezeichnet, mit i die imaginäre Einheit.)

Aufgabe 180: Geradengleichungen

Die folgenden drei Teilmengen $G_0, G_+, G_- \subset \mathbb{C}$ veranschauliche man sich in der Gaußschen Zahlenebene, d. h. man überlege sich, welche geometrischen Objekte dadurch beschrieben werden. Dazu seien $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
G_0 &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0 \right\}, \\
G_+ &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \right\}, \\
G_- &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 181: Gleichungen und Ungleichungen

Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Bedingungen genügen

1. $\operatorname{Re} z^3 = 27$,
2. $z^2 + (2+i)z + 1 + i = 0$,
3. $|z - i| + |z + 2| < 3$.
4. Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen $a \geq 1$ die Gleichung
$$z + a\,|z+1| + i = 0$$
komplexe Lösungen besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 182: Identitäten mit Beträgen

Beweisen Sie die folgenden drei Behauptungen:

1. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z+1| > |z-1|$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z > 0$ ist.
2. Für $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ gilt $\operatorname{Re}\,\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z = 0$ ist.
3. Für $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ gilt $\operatorname{Im}\,\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Im} z = 0$ oder $|z| = 1$ ist.

Aufgabe 183: komplexe Wurzeln

Berechnen Sie die Quadratwurzeln aus $5 + 7i$ und $\sqrt{2}\,(1+i)$.

Aufgabe 184: Polynome

1. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen z der folgenden Gleichungen:
$$(z - 3i)^6 + 64 = 0, \qquad z^2 - z + iz - i = 0.$$
2. Es sei $P = P(z)$ das folgende Polynom fünften Grades:
$$P(z) = z^5 + z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 4z.$$
Berechnen Sie $P(1+i)$, $P(2+i)$ und zerlegen Sie P in Linearfaktoren!

Aufgabe 185: Unimodularität

Es seien a, b komplexe Zahlen mit $|a| \neq |b|$ und z eine unimodulare komplexe Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\bar{b}z + a \neq 0$ ist und die komplexe Zahl
$$w := \left(\bar{a}z + b\right)/\left(\bar{b}z + a\right)$$
wieder unimodular ist.

Aufgabe 186: Vereinfachung

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}.$$

Kapitel 19

Möbiustransformationen

19.1 Spiegelung am Kreis

Aufgabe 187: Transformation auf Kreisringe

Wie sieht das Bild vom
$$M := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z + i| < 2\}$$
unter der Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ aus?

Aufgabe 188: Transformation auf Kreisringe

1. Wie kann man durch eine Möbiustransformation das Gebiet zwischen zwei nichtkonzentrischen und durchschnittsleeren Kreislinien in der Gaußschen Zahlenebene auf ein Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreislinien abbilden?
2. Existiert eine Möbiustransformation, die das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1, |z| < 8\}$ auf den Kreisring $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ abbildet?
3. Geben Sie alle Möbiustransformationen an, bei denen der innere Randkreis des Bildes von G der Einheitskreis ist.

Kapitel 20

Residuensatz

20.1 Berechnung reeller Integrale

Aufgabe 189: Residuensatz

Berchnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

mit Hilfe eines komplexen Integrals.

Teil VI

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kapitel 21

Einführende Übungen

21.1 DGls zu Kurvenscharen

Aufgabe 190: DGl zu zweiparametriger Parabelschar

Es sei folgende 2-parametrige Schar von Parabeln im $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a\,(x-b)^2,\ a,b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bestimmen Sie eine Differentialgleichung 2. Ordnung, welche diese Parabeln als Lösungskurven besitzen.

Aufgabe 191: Einparametrige Geradenschar

Es sei folgende 1-parametrige Geradenschar im $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2c\,(x-c) + c^2,\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Wie viele Kurven der Schar gehen durch einen gegebenen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?
- Geben Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung an, welche diese Geraden als Lösungskurven besitzen.

21.2 Einfache Anfangswertprobleme

Aufgabe 192: Anfangs- und Randwertprobleme

- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y^{(3)}(x) = \sin 2x,\ (x \in [0,1]),\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{32},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},\ y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

- Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems:

$$y''(x) = x^3\ (x \in [0,1]),\ y(0) = y(1) = 0$$

Aufgabe 193: Anfangswertproblem zu einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

Es seien $n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x, \ (x \in \mathbb{R}), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Kapitel 22

erster Ordnung

22.1 Analytische Lösungen

Aufgabe 194: Potenzreihenansatz

Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x^3 + y^3, \quad y(0) = 1$$

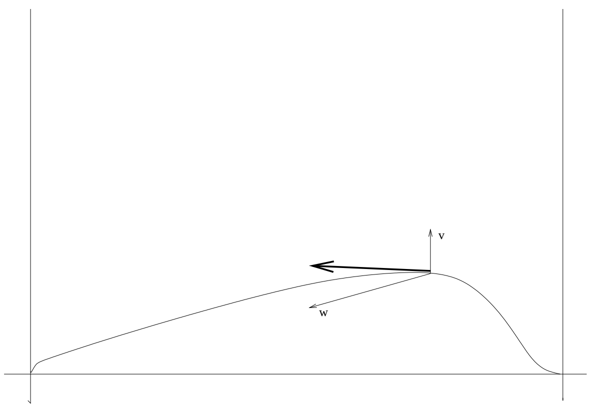
bestimme man die ersten vier Glieder der Potenzreihenentwicklung. Man gebe außerdem eine Abschätzung für den Konvergenzradius an.

22.2 direkt lösbare Typen

22.2.1 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Aufgabe 195: Bahn einer Ente

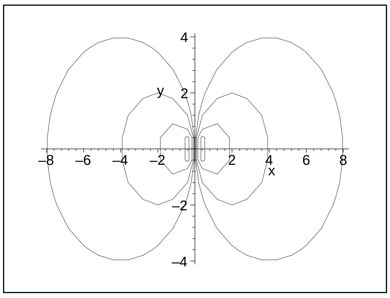
Ein Fluss strömt im Streifen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ mit der Wassergeschwindigkeit $v = (0, v(x))$. Zur Zeit $t = 0$ startet eine Ente im Punkt $(1, 0)$ und schwimmt mit der konstanten Relativgeschwindigkeit w immer in Richtung auf ihren Zielpunkt $(0, 0)$.
Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Bahnkurve der Ente auf und diskutieren Sie die Lösung für für konstante v und für den Fall $v(x) = 2x(x - 1)$.



Erreicht die Ente immer ihr Ziel?

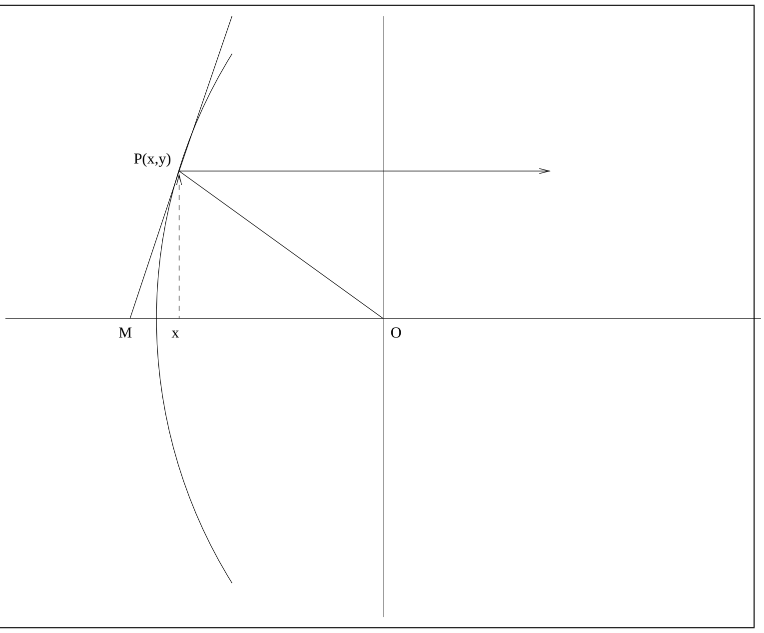
Aufgabe 196: Orthogonale Trajektorien

Man bestimme die orthogonalen Trajektorien zu der Kurvenschar $x^2 + y^2 = 2cx$



Aufgabe 197: Parabolspiegel

Welche Form hat ein Spiegel, der von einem Punkt ausgehende Strahlen parallelisiert?



Aufgabe 198: Rechte Seite ist Funktion eines Quotienten aus Linearausdrücken

1. Zeigen Sie, dass sich Differentialgleichungen der Form

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad \text{mit} \qquad D = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

   im Falle $D = 0$ auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen und im Falle $D \neq 0$ auf eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung bzw. eine Euler-homogene Differentialgleichung zurückführen lassen.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + y + 1}{x + 2} - \exp\left(\frac{x + y + 1}{x + 2}\right) \ .$$

22.2.2 Bernoullische Differentialgleichung

Aufgabe 199: Anfangswertprobleme für Bernoullische Differentialgleichungen

- Bestimme die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' = -2y + y^2 \mathrm{e}^x.$$

- Löse zur Differentialgleichung aus a) die Anfangswertprobleme mit:

$$y(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad y(0) = 1 \quad \text{bzw.} \quad y(0) = -1$$

und bestimme jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung.

Aufgabe 200: Bernoullische Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y$ mit gegebenen Funktionen $f_0, f_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$[a] heißt eine *Bernoullische Differentialgleichung.*
Durch die Transformation $y(x) = z^\beta(x)$ lässt sich eine solche Differentialgleichung auf eine lineare Differentialgleichung der Form

$$z' = a(x)\, z + s(x)$$

für z zurückführen.

1. Bestimmen Sie $\beta, a(x)$ und $s(x)$ aus $\alpha, f_0(x)$ und $f_1(x)$.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y, \quad y(1) = \frac{2}{3}.$$

[a] Für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$ ist die Gleichung bereits eine lineare inhomogene bzw. homogene Differentialgleichung.

Aufgabe 201: Bernoullische Differentialgleichung

Es seien f_0, f_1 stetige reelle Funktionen in einem Intervall (a, b) und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y$$

eine Bernoullische Differentialgleichung. Für $\alpha = 0$ entsteht eine inhomogene lineare und für $\alpha = 1$ eine homogene lineare Differentialgleichung, die nach Rezept gelöst werden können.

1. Zeigen Sie, dass im Fall $\alpha \neq 1$ und $y > 0$ durch die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ eine lineare Differentialgleichung für z entsteht.

2. Beweisen Sie folgenden Satz: Sind f_0, f_1 in (a, b) stetig und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \quad y_0 > 0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung in einer Umgebung von x_0. Ist $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, dann gilt das auch für $y_0 < 0$.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$4y' \sin x = -y \left(1 + y^4\right) + y^5 \cos x.$$

22.2.3 Exakte Differentialgleichung

Aufgabe 202: Anfangswertproblem

- Teste die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit

$$y^2 - x - y \sin x + (2\,x\,y + \cos x)\,y' = 0.$$

- Löse das Anfangswertproblem zu a) mit $y(\pi) = 0$.

Aufgabe 203: Eulerscher Multiplikator m(x)

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^3 + 3x^2y + 6xy}{3(x^2 + y^2)}$$

einen nur von x abhängigen Eulerschen Multiplikator. Bestimmen Sie dann die Funktion $F = F(x, y)$, deren Niveaulinien mit den Lösungskurven der Differentialgleichung übereinstimmen. Für welche Werte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist das Anfangswertproblem mit den Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ in einer Umgebung von x_0 eindeutig lösbar?

Aufgabe 204: Eulerscher Multiplikator

Bestimmen Sie für die folgende Differentialgleichungeinen Eulerschen Multiplikator der Form $\lambda = \lambda(x^2 + y^2)$ und bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung von

$$(y^2 + x^2 + x)\, y' = y.$$

Aufgabe 205: Eulerscher Multiplikator $m(x^\alpha y^\beta)$

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}$$

einen Eulerschen Multiplikator m durch einen Ansatz in der Form

$$m(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

mit geeigneten $\alpha,\ \beta$. Lösen Sie damit die Differentialgleichung.

Aufgabe 206: lieare Differentialgleichung als exakte Differentialgleichung lösen

Bestimmen Sie einen Eulerschen Multiplikator für eine lineare Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

und lösen Sie die zugehörige exakte Differentialgleichung.

22.2.4 Riccatische Differentialgleichung

Aufgabe 207: Riccatische Differentialgleichung

Beweisen Sie: Sind $y = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, 4$ vier verschiedene Lösungen einer Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x),$$

im Intervall (a, b), dann ist ihr Doppelverhältnis konstant, d. h. es gilt für alle $x \in (a, b)$:

$$\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_2(x) - y_3(x)} : \frac{y_1(x) - y_4(x)}{y_2(x) - y_4(x)} = const.$$

Aufgabe 208: Riccatische Differentialgleichung

1. Zeigen Sie: Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $z = z(x)$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung in Normalform $z' = z^2 - f(x)$, so ist $y = y(x)$ genau dann eine von z verschiedene Lösung dieser Differentialgleichung, wenn $u = 1/(y-z)$ der linearen Differentialgleichung $u' + 2zu + 1 = 0$ genügt. Also: Kennt man von einer Riccatischen Differentialgleichung eine spezielle Lösung, dann kann man alle weiteren Lösungen durch elementare Integrationen bestimmen.

2. Bestimmen Sie auf dem in a) beschriebenen Wege die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung
$$z' = z^2 - \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 209: Riccatische Differentialgleichung

Lösen Sie die Riccatische Differentialgleichung
$$y' = -(x+1)\,y^2 - y + \frac{3-x}{4x^2}.$$
Hinweis: Versuchen Sie zunächst mit dem Ansatz $y_s(x) = a\,x^\alpha$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung zu finden

Aufgabe 210: Riccatische Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form
$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + s(x),$$
von der eine spezielle Lösung $y_s(x)$ bekannt ist, lässt sich durch die Transformation $y(x) = z(x) + y_s(x)$ auf eine Bernouliische Differentialgleichung der Form
$$z' = p(x)z + q(x)z^2$$
zurückführen.

1. Bestimmen Sie $p(x)$ und $q(x)$ in Abhägingkeit von $a/x), b(x), s(x)$ und $y_s(x)$.

2. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Riccatischen Differentialgleichung
$$y' = -\left(2x\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) y + xy^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + x^2$$
mit dem Ansatz $y_s(x) = a\,x^\alpha$.

3. Transformieren Sie die Riccatische in ein Bernoullische Differentialgleichung.

4. Geben Sie die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung an.

Aufgabe 211: Riccatische Differentialgleichung

Beweisen Sie: Ist die Funktion $y = y(x)$ im Intervall (a, b) eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = f_0(x)y^2 + 2f_1(x)y + f_2(x),$$

so ist die Funktion $u = u(x)$ mit

$$u(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f_0(t)y(t)\,dt\right), \quad x, x_0 \in (a, b)$$

eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f_0(x)u'' - \big(f_0'(x) + 2f_0(x)f_1(x)\big)\,u' + f_0^2(x)f_2(x)u = 0.$$

Ist umgekehrt $u = u(x)$ eine nicht verschwindende Lösung dieser Differentialgleichung, dann ist $z = -u'/(f_0(x)u)$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. (f_0 sei in (a, b) stetig differenzierbar mit $f_0(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

Aufgabe 212: Riccatische Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f_0(x)y^2 + f_1(x)y + f_2(x)$$

mit gegebenen Funktionen $f_0, f_1, f_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) \neq 0$ heißt eine *Riccatische Differentialgleichung.*

1. Es seien f_0 zweimal stetig differenzierbar, f_1 einmal stetig differenzierbar und f_2 stetig. Bestimmen Sie Funktionen $g = g(x)$ und $f = f(x)$, so dass die Transformation $z = f_0 y + g$ die Riccatische Differentialgleichung in die *Normalform* $z' = z^2 - f(x)$ überführt.

2. Berechnen Sie die Normalform der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = y^2 - (2x + 1)y + (1 + x + x^2).$$

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprüglichen Riccatischen Differentialgleichung an.

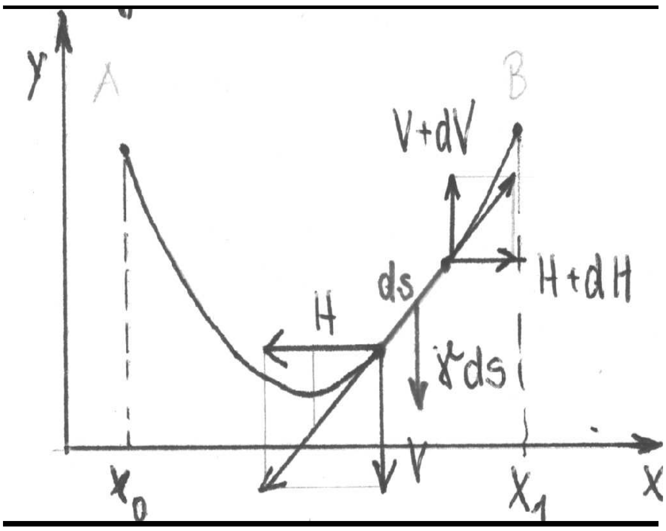
22.2.5 Trennung der Variablen

Aufgabe 213: Eine Aufgabe mitten aus dem fröhlichen (Studenten-)Leben.

Eine gewisse Menge an Bier wird in einer stehenden kreiszylinderförmigen Tonne vom Radius r bzw. einem kreiskegelstumpfförmigen Behälter mit dem Radius r am Boden und Radius $R > r$ in der Höhe $H > 0$ gelagert. In die Böden wird jeweils ein Zapfhahn mit dem gleichen Querschnitt eingeschlagen. Aus welchem Behälter ist die gleiche Menge Bier bei geöffnetem Zapfhahn schneller vollständig ausgelaufen? Hinweis: Benutzen Sie Torricelli's Ausflußgesetz (benannt nach dem Mathematiker und Physiker Evangelista Torricelli, 1608-1647), wonach die Ausflußgeschwindigkeit v einer idealen Flüssigkeit (Bier?) durch eine nach unten gerichtete Öffnung sich proportional zur Höhe h der Flüssigkeit verhält, genauer $v = \sqrt{Gh}, G$ Gravitationskonstante. Leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für die Flüssigkeitshöhe $h(t)$ zur Zeit t in beiden Fällen ab und diskutieren Sie diese.

Aufgabe 214: Die Kettenlinie

Leiten Sie die Differentialgleichung der Kettenlinie her, bestimmen Sie deren Lösungen und diskutieren Sie dabei die verschiedenen Fälle!



Aufgabe 215: Nicht eindeutige Lösung des AWP

Das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y} \quad \text{in} \quad [0, \infty), \quad y'(0) = 0$$

besitzt die triviale Lösung $y \equiv 0$. Existiert zu jedem $\lambda > 0$ auch eine Lösung dieses Anfangswertproblems mit

$$y(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in [0, \lambda] \quad \text{und} \quad y(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in (\lambda, \infty)?$$

Aufgabe 216: Rechte Seite ist Funktion eines lienaren Ausdrucks

1. Zeigen Sie, dass sich Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(ax + by + c)$$

   durch die Ersetzung $z(x) = ax+by(x)+c$ auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückführen lässt.

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 - \frac{2}{x - 2y + 5}.$$

Aufgabe 217: Differentialgleichung der Traktrix

Bestimmen Sie die differenzierbaren Kurven $y = y(x)$, $y(x) > 0$, deren Tangenten zwischen dem Berührungspunkt mit der Kurve und dem Schnittpunkt mit der x-Achse eine konstante Länge $a > 0$ haben. Eine solche Kurve heißt auch *Ziehkurve* oder *Traktrix* und entsteht, wenn man bei geradliniger Bewegung auf der x-Achse einen Gegenstand hinter sich herzieht, der zu Beginn der Bewegung nicht auf der Ziehgeraden lag.

Diese Aufgabe soll von G.W. Leibniz (1646 - 1716) stammen, der die Bewegung seiner im Punkte $(0, a)$ liegenden silbernen Taschenuhr verfolgte, als er das am andere, im Koordinatenursprung befindliche Ende der Uhrkette entlang der x-Achse verschob.

22.3 implizite Dgl

22.3.1 Auflösung nach x möglich

Aufgabe 218: Auflösung nach x möglich

Lösen Sie für die implizite Differentialgleichung

$$(y')^3 + y' - x = 0$$

das Anfangswertproblem $y(1) = 1$ und skizieren Sie die Lösung.

22.3.2 Auflösung nach y möglich

Aufgabe 219: Auflösung nach y möglich

Lösen Sie für die implizite Differentialgleichung

$$y = x^2 \mathrm{e}^{y'} + x\, y'$$

das Anfangswertproblem $y(1) = 1$ und skizieren Sie die Lösung.

22.3.3 Clairautsche DGL

Aufgabe 220: Theorie der Clairautschen Differentialgleichungen.

Eine reelle Funktion $g = g(t)$ sei für $t \in [a, b]$ zweimal stetig differenzierbar mit $g''(t) \neq 0$. Durch $y = xt + g(t), t \in [a, b]$ wird eine Schar von Geraden im $\mathbb{R}^2$ gegeben.

1. Zeigen Sie: Es gibt eine ebene Kurve, deren Tangenten Geraden aus dieser Schar sind; man nennt die Kurve deshalb auch Einhüllende der Geradenschar.

2. Die Differentialgleichung $y = xy' + g(y')$ heißt eine Clairautsche Differentialgleichung.

   Zeigen Sie: Die Geradenschar und die Kurve von a) sind Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aufgabe 221: Ein Beispiel zur Clairautschen Differentialgleichung

Man löse die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = x\,y' - \sqrt{1 + (y')^2}\ ! \tag{22.1}$$

Aufgabe 222: Clairautsche Differentialgleichung

Geben Sie alle Lösungen der Clairautschen Differentialgleichung

$$y = x\,y' + \left(y'\right)^2$$

an.

22.3.4 Lagrangesche DGL

Aufgabe 223: Lagrangesche Differentialgleichung

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y = 2\,x\,y' - \sqrt{1 + (y')^2} \tag{22.2}$$

Aufgabe 224: Ein Beispiel zur Lagrangeschen Differentialgleichung

Man löse die Lagrangesche Differentialgleichung

$$y = 2x\,y' - \ln y'\ ! \tag{22.3}$$

22.4 Lineare Differentialgleichung

Aufgabe 225: Ein Anfangswertproblem

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für eine lineare Differentialgleichung:

$$y' = \frac{y}{1+x^2} + 2x - 1; \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 226: Die Differentialgleichung des Stromkreises

Die lineare Differentialgleichung für die Stromstärke $I = I(t)$ in einem Stromkreis bestehend aus einem Ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L lautet:

$$\frac{dI}{dt}(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{U(t)}{L}.$$

Dabei ist $U = U(t)$ die angelegte Spannung.

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem mit der Wechselspannung $U(t) = A\sin(\omega t)$ und $I(0) = 0$.
2. Zeigen Sie, dass die Stromstärke für $t \to +\infty$ wieder eine Sinusschwingung gleicher Frequenz, aber mit einer Phasenverschiebung ist und berechnen Sie diese Phasenverschiebung!

Leben eines Aufgabe 227: *Käfers auf dem Gummiband*

Lösen Sie die folgende Aufgabe aus dem Leben eines *Käfers auf dem Gummiband*. Gegeben sei ein beliebig dehnbares Gummiband auf der x-Achse. Ein Ende des Gummibandes werde bei $x = 0$ festgehalten. Das freie Ende entfernt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 vom festen Ende. Zur Zeit $t = 0$ habe das Band die Länge $L > 0$ und zu dieser Zeit beginnt ein Käfer bei $x = 0$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 relativ zum Band auf diesem entlang zu kriechen. Errreicht er immer das andere Ende und wenn ja, nach welcher Zeit?

Aufgabe 228: Leitkurve

Die Gleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Dabei seien die Funktionen f, g stetig für $x \in (a, b)$ und $f(x) \neq 0$.
Zeigen Sie: Die Geraden mit den Richtungen, welche das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung den Punkten einer Geraden $x = x_0, x_0 \in (a, b)$ zuordnet, verlaufen durch einen Punkt $P(x_0) \in \mathbb{R}^2$! Die Punkte $P(x_0), x_0 \in (a, b)$ liegen auf der sogenannten *Leitkurve.*
Bestimmen Sie die Gleichung der Leitkurve für das folgende Beispiel

$$y' = \frac{x}{x^2 - 1} y - \frac{5}{x^2 - 1} \quad \text{für} \quad 1 < x < 4.$$

Fertigen Sie eine Zeichnung für das Richtungsfeld und die Leitkurve an, die die obige Behauptung illustriert.

Aufgabe 229: lieare Differentialgleichung als exakte Differentialgleichung lösen

Bestimmen Sie einen Eulerschen Multiplikator für eine lineare Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

und lösen Sie die zugehörige exakte Differentialgleichung.

Aufgabe 230: Verhalten im Unendlichen

In der linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

seien die Funktionen f, g für $x \geq 0$ definiert und stetig mit

$$f(x) \geq \alpha > 0, \quad |g(x)| \leq M$$

mit festen Zahlen α, M . Zeigen Sie:

1. Für jede Lösung der homogenen Differentialgleichung gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.
2. Jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist für $x \geq 0$ beschränkt.

22.5 Theorie

Aufgabe 231: Autonome Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung,
$$y' = f(y)$$
bei der die rechte Seite nicht explizit von der unabhängigen Variablen x abhängt, heißt autonom.

Zeigen Sie:

1. Zu jeder Lösung $y(x)$ einer autonomen Differentialgleichungund jedem $a \in \mathbb{R}$ ist die in Richtung der x-Achse verschobene Funktion $y_a(x) := y(x+a)$ Lösung dieser Differentialgleichung.
2. Existiert
$$\int \frac{dy}{f(y)},$$
so kann man die Umkehrfunktion der Lösung bestimmen. Geben Sie diese an!

Aufgabe 232: Eindeutigkeitssatz von Nagumo

Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ in einer offenen Umgebung U von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig und es gelte:
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \cdot |x - x_0| \leq |y - \bar{y}| \quad \text{für alle } (x,y), (x,\bar{y}) \in U.$$
Zeigen Sie (Eindeutigkeitssatz von Nagumo): Es existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = f(x,y), \; y(x_0) = y_0$$
in einer Umgebung von x_0.

Aufgabe 233: Lipschitzbedingung auf Vertikalstreifen

Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt sie auf jedem Vertikalstreifen $[-a,a] \times \mathbb{R}, a > 0$ eine Lipschitzbedingung bezüglich y, wobei die Lipschitzkonstante von a abhängen kann, so besitzt das Anfangswertproblem
$$y' = f(x,y), \; y(x_0) = y_0 \quad (x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$
genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Aufgabe 234: Monotonieprinzip

Es seien die Funktionen $w = w(x), z = z(x)$ für $x \in [a, b]$ stetig differenzierbar und $w(a) = z(a)$. Ferner sei $f = f(x, y)$ für $x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$ definiert. w genüge der Differentialgleichung

$$w'(x) = f\left(x, w(x)\right), \quad x \in [a, b],$$

während z der Differentialungleichung

$$z'(x) > f\left(x, z(x)\right), \quad x \in [a, b],$$

genüge. Zeigen Sie:

$$z(x) > w(x) \quad \text{für} \quad x \in (a, b].$$

Aufgabe 235: Polygonzugmethode

Es werde das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ mit der durch

$$f(x, y) = y|y|^{-3/4} + x \sin\frac{\pi}{x}$$

gegebenen stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachtet (für $y = 0$ werde $y|y|^{-3/4} = 0$ und für $x = 0$ werde $x \sin\frac{\pi}{x} = 0$ gesetzt). Sei $\delta = (n + \frac{1}{2})^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ und y_n der zugehörige Eulersche Polygonzug mit den Stützstellen $x_k = k\delta$. Beweisen Sie, daß die Folge $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dieser Polygonzüge in keinem Intervall der Form $[0, a]$, $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie durch Fallunterscheidung n gerade/ungerade und untere bzw. obere Abschätzung, daß die Folge $\{y_n(x)\}_{n\geq 1}$ für kein $x \in (0, a_0)$, $a_0 > 0$ hinreichend klein, konvergiert.

Aufgabe 236: Sukzessive Approximation

1. Bestimmen Sie nach der Methode der sukzessiven Approximation die ersten vier Näherungen für die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = y^2 + 3y - 4, \qquad y(0) = -\frac{3}{2}.$$

2. Sind alle sukzessiven Approximationen Polynome und wenn ja, von welchem Grad?
3. Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall um 0, in dem der Satz von Picard-Lindelöf die gleichmäßige Konvergenz der sukzessiven Approximationen garantiert.
4. In welchem Intervall existiert die exakte Lösung? Lässt sich die exakte Lösung in eine Potenzreihe um 0 entwickeln? Wenn ja, dann vergleichen Sie die Näherungen mit der Potenzreihenentwicklung der exakten Lösung.

Kapitel 23

n-ter Ordnung

23.1 Analytische Lösungen

Aufgabe 237: Potenzreihenansatz

Suchen Sie für die Differentialgleichung $y'' + xy = 0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen in Gestalt von Potenzreihen und berechnen Sie dessen Wronskideterminate. Was lässt sich über die Konvergenz der Reihen aussagen?

23.2 konstante Koeffizienten

Aufgabe 238: konjugiert komplexe Eigenwerte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 17y'' - 28y' + 20y = 0.$$

Aufgabe 239: allgemeine Lösung und Anfangswertproblem

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 1 - x.$$

Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

23.3 nichtkonstante Koeffizienten

Aufgabe 240: Eulersche Differentialgleichung

Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen:

a) $x^3y''' + xy' - y = 3x^4$;

b) $x^2y'' - 7xy' + 15y = x$ mit Anfangswerten $y(1) = y'(1) = 0$.

Aufgabe 241: Eulersche Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass sich eine sogenannte *Eulersche Differentialgleichung*

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ im Intervall $(0, \infty)$ durch die Substitution $x = e^t$ in eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $z = z(t) := y(x(t)$ überführen läßt.

Aufgabe 242: Fundamentalsystem bei nichtkonstanten Koeffizienten

Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentialgleichung

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0.$$

Hinweis: Suchen Sie zunächst Lösungen in der Gestalt $y = x^a$!

Aufgabe 243: Fourierentwicklung

Bestimmen Sie die 2π-periodische Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = g(x)$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ 2 - \dfrac{x}{\pi} & \text{für} \quad \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Geben Sie Fourierreihenentwicklung der Lüsung an und zeigen Sie deren gleichmäßige und absolute Konvergenz.

Aufgabe 244: Reduktion

Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentialgleichung

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0.$$

Hinweis: Suchen Sie zunächst Lösungen in der Gestalt $y = x^\alpha$!

Aufgabe 245: Reduktion

Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

Hinweis: Suchen Sie zunächst Lösungen in der Gestalt $y(x) = x^\alpha \mathrm{e}^x$!

Aufgabe 246: Partielle Integration

Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$xy'' + (y-1)y' = 0, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = -2.$$

Hinweis: Integrieren Sie die linke Seite über das Intervall $[1, x]$ und formen Sie durchpartielle Integration um; man erhält eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

Aufgabe 247: Multiplikationstrick

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = \mathrm{e}^y, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = \sqrt{2}.$$

Hinweis: $y'y'' = \frac{1}{2}\left(y'^2\right)'$, $\mathrm{e}^y y' = (\mathrm{e}^y)'$!

23.4 Theorie

Aufgabe 248: Differentialgleichungzu gegebenem Fundamentalsystem bestimmen

a) Unter welchen Voraussetzungen kann man zu gegebenen Funktionen $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung bestimmen, für die $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem bilden?
b) Diskutieren Sie die Frage von a) für das Beispiel

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad x > 0$$

und geben Sie gegebenenfalls eine Differentialgleichung an.

Aufgabe 249: Fortsetzbarkeit

Es werde die Differentialgleichung$y'' = g(y)$ betrachtet. Dabei genüge $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Lipschitzbedingung und es gelte $sg(s) < 0$ für $s \neq 0$.

Zeigen Sie:

1. Jede Lösung der Differentialgleichungist auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar.
2. Gilt $\int_0^s g(t)\,dt \to -\infty$ für $s \to \pm\infty$, so ist jede Lösung periodisch.

Aufgabe 250: Höchstens eine Nullstelle

Sei $y(x)$ eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $y'' + q(x)\,y = 0$ im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Funktion q sei stetig und negativ auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass y im Intervall $[a, b]$ höchstens eine Nullstelle hat.

Aufgabe 251: Polynomringeigenschaft von Differentialoperatoren

Jedem Polynom
$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_0$$
wird ein Differentialoperator $P(D)$, $D = d/dx$ mit konstanten Koeffizienten zugeordnet, der auf Funktionen $u = u(x)$ nach der Vorschrift

$$P(D)u = a_n D^n u + a_{n-1}D^{n-1}u + \dots a_0 u$$

wirkt. Zeigen Sie die Rechenregel aus der Vorlesung:

$$P_1(D)[P_2(D)u] = P_2(D)[P_1(D)u] = (P_1P_2)(D)u.$$

Aufgabe 252: Spezielle Lösung

Gegeben sei die inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ und stetiger Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Das zugehörige charakteristische Polynom sei $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, d. h. α ist n-fache Nullstelle von P.
Zeigen Sie: $y_s(x) := u(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ ist genau dann eine spezielle Lösung der inhomogen Gleichung, wenn $u^{(n)}(x) = f(x)$ ist.

Aufgabe 253: Taylorscher Lehrsatz

Es seien eine stetige Funktion $g = g(x)$ im Intervall $(a, b), x_0 \in (a, b)$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} = g(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y(n-1)(x_0) = y_{n-1}.$$

Aufgabe 254: Unendlich viele Nullstellen

Zeigen Sie: Hat eine Lösung $y = y(x), x \in [a, b]$ einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit stetigen Koeffizienten im Intervall $[a, b]$ unendlich viele Nullstellen, so ist $y(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Kapitel 24

Systeme

24.1 konstante Koeffizienten

Aufgabe 255: allgemeine Lösung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems für drei gesuchte Funktionen $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + \cos x, \\ y_2' &= 2y_1 - y_3 + \sin x, \\ y_3' &= 4y_1 - 2y_2 - y_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 256: allgemeine Lösung bestimmen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystemserster Ordnung für drei gesuchte Funktionen $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), y_3 = y_3(x)$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 257: einfache und doppelte konjugiert komplexe Nullstellen

Man gebe reelle Fundmentalsysteme für die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme an.

$$a) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 258: Fundmentalsystem

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 259: gemeinsame Lösungen

a) Zeigen Sie: Zwei lineare homogene Differentialgleichungen haben genau dann eine nichttriviale gemeinsame Lösung, wenn der Grad des größten gemeinsamen Teilers ihrer charakteristischen Polynome ≥ 1 ist.
b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y^{(6)} - y^{(4)} + 2y^{(2)} - 2y &= 0, \\ y^{(5)} - 3y^{(3)} + 2y' &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 260: geomerische VFH < algebraische VFH

Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems!

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 261: Kompartement-Modell 1

Ein Tank K_1 enthalte 100 Liter Wasser, in dem 5 kg Salz aufgelöst sind, ein Tank K_2 enthalte 300 Liter Wasser, in dem 5 kg Salz aufgelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ werden pro Minute ständig 10 Liter Salzlösung von K_1 nach K_2 und 10 Liter von K_2 nach K_1 gepumpt und sofort verrührt. Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ in $K_i, i = 1, 2$ zur Zeit $t > 0$? Auf welchem Niveau stabilisiert sich schließlich der Salzgehalt in K_i ?

Aufgabe 262: nilpotente Koeffizientenmatrix

Es sei A eine nilpotente reelle $(n \times n)$-Matrix, d.h. es gilt $A^l = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:
Jede Funktion y_i einer Lösung $y = (y_1, \ldots, y_n)$ des Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ ist ein Polynom vom Grad $\leq l - 1$.

Aufgabe 263: Rang-1-Koeffizientenmatrix

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad a_j = const.$$

Berechnen Sie die Determinante der zugehörigen Fundamentalmatrix.

Aufgabe 264: Schiefsymmetrische Koeffizientenmatrix

Zeigen Sie, daß eine reelle $(n \times n)$-Matrix A genau dann schiefsymmetrisch ist (d.h. es gilt $A = -A^\top$), wenn alle Lösungen $y = y(x)$ des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ einen konstanten (euklidischen) Betrag haben: $y(x)^\top y(x) = const.$

Aufgabe 265: Verhalten im Unendlichen

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $x \to \pm\infty$?

24.2 Matrixexponentialfunktion

Aufgabe 266: Anwendung der Rechenregeln

Berechnen Sie

$$\exp\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 267: Beispiele für die Matrixexponentialfunktion

Berechnen Sie die folgenden Werte der Matrizen-Exponentialfunktion:

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 268: Matrix-Exponentialfunktion

Berechne die folgenden Matrizen:

1. $$\mathrm{e}^{xA} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
   mit beliebigen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{e}^A, \mathrm{e}^B, \mathrm{e}^A e^B, \mathrm{e}^B e^A$ und e^{A+B} für
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 269: Nilpotenz

Zeigen Sie: Ist A eine nilpotente, komplexe $(n \times n)$-Matrix mit $A^{l+1} = 0$, $l \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$E - A = \exp\left(-A - \frac{A^2}{2} - \frac{A^3}{3} - \ldots - \frac{A^l}{l}\right).$$

Aufgabe 270: Positive Matrizen

Beweisen Sie: Genau dann sind die Elemente von e^{xA} ($A = (a_{ij})$ reelle $(n \times n)$-Matrix) für alle $x \geq 0$ nichtnegativ, wenn für die Elemente a_{ij} von A gilt: $a_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$.
Hinweis: Für hinreichend großes $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Elemente von $A + \alpha E$ alle ≥ 0.

Aufgabe 271: Rechenregeln für die Matrixexponentialfunktion

Es seien A, B komplexe $(n \times n)$-Matrizen mit $AB = BA$ (d.h. die Matrizen sind vertauschbar). Zeige Sie die folgenden Rechenregeln für die Matrizen-Exponentialfunktion:
a) $\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A$,
b) $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$.
Zusatzaufgabe: Geben Sie Gegenbeispiele zu a), b) an, falls die Bedingung der Vertauschbarkeit verletzt ist.

Aufgabe 272: Umkehrfunktion zur Matrix-Exponentialfunktion

Bestimmen Sie eine komplexe (2×2)-Matrix C mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^C.$$

24.3 nichtkonstante Koeffizienten

Aufgabe 273: Zurückführung auf Gleichung 2. Ordnung

Es sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$Y' = A(x)Y + b(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix},\ b(x) = \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (x > 0)$$

für zwei gesuchte Funktionen $Y = (y_1, y_2)^\top$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten $Y(2) = (1, 4)^\top$.

Aufgabe 274: konstante Differenz

Es sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + 1, \qquad y_2' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + x \qquad (x > 0)$$

gegeben. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene System. Lösen Sie das Anfangswertproblem für das inhomogene System mit den Anfangswerten $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$.

Aufgabe 275: Lineares DGL-System und Matrix-Exponentialfunktion

Die Funktionen $f = f(x), g = g(x)$ seien in einem Intervall $[a, b]$ stetig. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= f(x)y_1 - g(x)y_2, \\ y_2' &= g(x)y_1 + f(x)y_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutze die bereits an anderer Stelle bewiesene Beziehung

$$A = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u \cos v & -\mathrm{e}^u \sin v \\ \mathrm{e}^u \sin v & \mathrm{e}^u \cos v \end{pmatrix}$$

Aufgabe 276: Spezielle Lösung

Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y_1' = 2xy_2 + \cos x^2, \quad y_2' = -2xy_1 - \sin x^2.$$

Kapitel 25

Trajektorien

Aufgabe 277: Trajektorien - Theorie und Beispiele

Orthogonale Trajektorien einer gegebenen ebenen Kurvenschar sind Kurven, die die gegebene Schar in jedem Punkt senkrecht schneiden. So sind z. B. die Äquipotentiallinien orthogonale Trajektorien zu den Feldlinien eines Kraftfeldes. Allgemeiner sind isogonale Trajektorien Kurven, die die gegebene Schar unter einem festen Winkel $\alpha \in [0; \pi/2]$ schneiden; i. allg. gibt es jeweils zwei Scharen isogonaler Trajektorien zum Schnittwinkel α.

1. Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für die orthgogonalen Trajektorien zu einer Kurvenschar, die in der impliziten Form $F(x, y, c) = 0,\ c \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

2. Bestimmen Sie die isogonalen Trajektorien mit dem Schnittwinkel α zur Geradenschar $y = cx,\ c \in \mathbb{R}$.

3. Bestimmen Sie die orthogonalen Trajectorien zur Ellipsenschar $x^2 + 2y^2 = c^2,\ c \in \mathbb{R}$.

Teil VII

Lineare Algebra

Kapitel 26

Binomialkoeffizienten

Aufgabe 278: Primzahltest

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:
n ist Primzahl genau dann, wenn n Teiler von $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ ist für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

Kapitel 27

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 279: vollsymetrisches System

Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $a+b+c \neq 0$. Zeigen Sie, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a\,x_1 & + & b\,x_2 & + & c\,x_3 & & & & & = & 0 \\
 & & a\,x_2 & + & b\,x_3 & + & c\,x_4 & & & = & 0 \\
 & & & & a\,x_3 & + & b\,x_4 & + & c\,x_5 & = & 0 \\
c\,x_1 & & & & & + & a\,x_4 & + & b\,x_5 & = & 0 \\
b\,x_1 & + & c\,x_2 & & & & & + & a\,x_5 & = & 0
\end{array}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 Unbestimmte) nur die triviale Nulllösung besitzt.

Kapitel 28

Matrizen

28.1 Eigenvwerte und -vektoren

Aufgabe 280: Diagonalisierbarkeit

Zeigen Sie, dass der durch $T\mathbf{e}_1 = 0$, $T\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}$, $(k = 2, \ldots, n)$, gegebene Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 281: Transformation auf Diagonalgestalt

1. Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix, die A in Diagonalgestalt überführt.

Aufgabe 282: Eindeutigkeit der Inversen

Sei K ein Ring mit Einselement und sei $A \in K^{m,n}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}^+$. Zeigen Sie:

a) Wenn es Matrizen $B, C \in K^{n,m}$ gibt mit $BA = E_n$ und $AC = E_m$, so folgt $B = C$.

b) Sei K ein Körper und sei A Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit Konstantentupel $\mathfrak{b} \in K^m$. Ist seine Lösungsmenge L nicht leer und gilt $m \leq n$, so sind zur Parameterdarstellung von L mindestens $n - m$ Parameter erforderlich.

c) Sei K ein Körper. Wenn $m \neq n$, so gibt es keine $B, C \in K^{n,m}$ mit $BA = E_n$ und $AC = E_m$.
Bemerkung: Dies gilt auch, wenn K ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement ist.

Kapitel 29

Vektorräume und Moduln

29.1 K(m,n)

Biuntermoduln von $K^{Aufgabe283:m,n}$

Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}^+$. Zeigen Sie, dass $K^{m,n}$ nur die trivialen $(K^{m,m}, K^{n,n})$-Biuntermoduln besitzt. Insbesondere besitzt $R^{n,n}$ nur die trivialen zweiseitigen Ideale.

29.2 Vektorräume

Aufgabe 284: Basen

1. Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{1 + x + x^2, 1 + x\}$ keine Basis für $\mathcal{P}^2$ ist. Sodann ergänzen Sie M durch Hinzunahme einer der Potenzen $1, x$ oder x^2 zu einer Basis für $\mathcal{P}^2$.
2. Sei $M = \{1, x^3 - x, x^3 + 1, x - 1\}$ und $U = \operatorname{span}(M)$ die lineare Hülle von M im Vektorraum $\mathcal{P}^3$. Wählen Sie eine Basis für U aus M aus.

Aufgabe 285: Dimension

1. Man bestimme die Dimension des durch die Vektoren $v_1 = (0, 1, 2), v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ aufgespannten Unterraumes U des $\mathbb{R}^3$.
2. U_1, U_2 seien Unterräume eines Vektorraumes V endlicher Dimension, und es sei $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Zeigen Sie, dass dann $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ gilt.

Aufgabe 286: Vektorraum-Eigenschaften

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

1. Man beweise mit Hilfe der Vektorraumaxiome, dass für alle $u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$,
$$0 \cdot u = O,\ (-1) \cdot u = -u,\ \alpha \cdot O = O.$$
2. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume von V wieder ein Unterraum von V ist.
3. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ .Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots v_n\} = \operatorname{span}\{av_1, v_2, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1 + bv_2, v_2, \ldots, v_n\}.$$

29.2.1 Lineare Abbildungen

Aufgabe 287: Abbildungsmatrix

Es sei $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ die kanonische Basis für den Vektorraum $\mathcal{P}^2$. Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $D \equiv \frac{d}{dx}$ auf $\mathcal{P}^2$ bzgl. $\mathcal{B}$ die Matrixdarstellung

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Aufgabe 288: Basistransformation

Es seien durch $\mathcal{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\}$ zwei Basen auf $\mathbb{R}^2$ und eine lineare Abbildung $L \in \mathcal{L}(R^2)$ durch die Matrix

$$M_{\mathcal{A}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man berechne nacheinander $S = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathbf{1})$, S^{-1} und $M_{\mathcal{B}}(L)$..

Aufgabe 289: Kern und Abildungsmatrix

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^4, \mathcal{P}^2)$ gegeben durch

$$Tp(x) := p''(x), \quad (p \in \mathcal{P}^4).$$

1. Man bestimme den Kern von T .
2. Seien $\mathcal{A} = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ und $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ die natüurlichen Basen von $\mathcal{P}^4$ bzw. $\mathcal{P}^2$. Bestimmen Sie die Matrix von T bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Aufgabe 290: Surjektivität und Injektivität

Es seien V, W Vektorräume der Dimension $n, (n \in \mathbb{N})$, und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \quad \text{ist bijektiv} \quad \Leftrightarrow L \quad \text{ist injektiv} \quad \Leftrightarrow L \quad \text{ist surjektiv.}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel und beachten Sie, dass L injektiv ist genau dann wenn Kern $L = \{0\}$ ist.

Aufgabe 291: Lineare Abhängigkeit

Es ist zu untersuchen, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraumes V linear unabhängig, welche linear abhängig sind.

1. $\left\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}\right\}, V = C(\mathbb{R})$.
2. $\left\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos(2x)\right\}, V = C(\mathbb{R})$.
3. $\{1, x, |x|\}, V = C(\mathbb{R})$.
4. $\{1, x, |x|\}, V = C([0, \infty))$.

Aufgabe 292: Linearkombinationen

Die nachstehend genannten Behauptungen beweise man bzw. widerlege man durch Angabe eines Gegenbeispiels.

1. Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein linear abhängiges Vektorsystem, so ist v_4 eine Linearkombination von $\{v_1, v_2, v_3\}$.
2. Ist v_4 eine Linearkombination von $\{v_1, v_2, v_3\}$, so ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein linear abhängiges Vektorsystem.

29.2.2 Unterräume

Aufgabe 293: Unterraumkriterien

1. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.
2. Wann ist für zwei Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ auch $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V?

Aufgabe 294: Unterraumkriterien

1. Man prüfe, ob die Menge M derjenigen Vektoren des $\mathbb{R}^n$, deren erste zwei Koordinaten x_1, x_2 die Gleichung $5x_1 - x_2 = 2$ erfüllen, ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Man untersuche, ob folgende Mengen von Polynomen Unterräume von $\mathcal{P}$ bilden:

2. die Menge M_1 aller Polynome, die für $x = 3$ verschwinden;

3. die Menge M_2 aller Polynome $p(x)$ mit $p(1) = 2$.

Teil VIII

Maß- und Integrationstheorie

Kapitel 30

Flächen und Durchfluss

Aufgabe 295: Ellipsoid

Man berechne Volumen und Oberfläche des Ellipsoids

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Aufgabe 296: Fluss des Coulomb-Feldes

Berechnen Sie den Fluß eines Coulumb-Feldes

$$K(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{x}{r}; \qquad r = \|x\| \neq 0$$

durch die nach außen orientierte Oberfläche ∂G eines zulässigen Bereiches $G \subset \mathbb{R}^3$, welcher den Ursprung in seinem Inneren enthält.

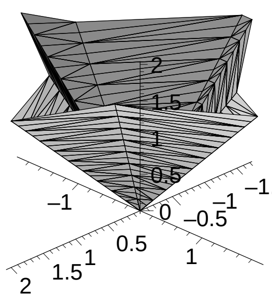
Aufgabe 297: Fluss durch Zylinderwand

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{w} = (x, y, z)$ durch den Rand des Zylinders vom Radius 1 und der Höhe 1, der symmetrisch zur z-Achse auf der (x, y)-Ebene steht.

Aufgabe 298: Kegelspitze

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes $S \subset \mathbb{R}^3$ mit

$S = \{(x, y, z) | x = z\cos^3\varphi, \ y = z\sin^3\varphi$
mit $0 \leq z \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.



Aufgabe 299: Schwerpunkt der oberen Halbsphäre vom Radius R

Man berechne den Schwerpunkt der oberen Halbsphäre $\mathfrak{F}$ vom Radius R

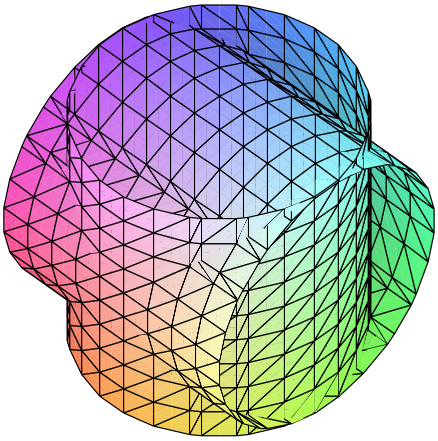
Aufgabe 300: Einander durchdringende Zylinder

1. Man bestimme denjenigen Teil der Fläche des Zylinders $x^2 + z^2 = a^2$, der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = a^2$ liegt!

2. Man bestimme die Durchflußmenge durch die obere Fläche zum Fluß $\vec{f} = (0, 0, 1)$!

3. Man bestimme die Durchflußmenge durch die Gesamtflächen zum Fluß $\vec{g} = (0, 0, z)$ (Quellen auf der (x, y)-Ebene)!

4. Man bestimme das Volumen des Gebietes G, das innerhalb beider Zylinder liegt.



Kapitel 31

Flächenintegrale im R2

Aufgabe 301: Streifen im 1. Quadranten

Berchnen Sie das Integral

$$I = \iint_\Omega x\, y\, dxdy,$$

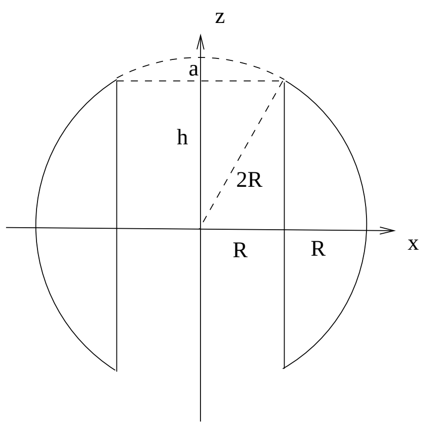
wenn $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0,\, 1 < x + y < 2\}$.

Kapitel 32

Gaußscher Satz im Raum

Aufgabe 302: Kugel - Zylinder
Aus einer Kugel vom Radius $2R$ wird ein Zylinder vom Radius R so herausgeschnitten, dass die Längsachse des Zylinders durch den Kugelmittelpunkt geht. Man bestimme das Volumen des Restkörpers K mit den folgenden Methoden:

1. klassische Geometrie
2. Volumenintegral
3. Satz von Gauß mit einem geeigneten Vektorfeld
4. Guldinsche Regel (Rotationskörper)

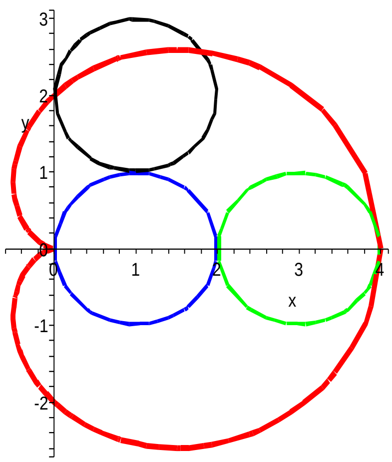


Kapitel 33

Gaußscher Satz in der Ebene

Aufgabe 303: Fläche der Kardioide

Berechnen Sie die von der Kardiode eingeschlossene Fläche und deren Umfang.



Die Kardioide (vgl. Bronstein Kap. 1.3.1.2) ist die Epizykloide (Rollkurve) eines Kreises vom Radius a, der um einen Kreis gleichen Radiusses reibungsfrei gerollt wird, d. h. die Kurve, die ein fester Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 304: Das kartesiche Blatt

Berechnen Sie den Flächeninhalt des im ersten Quadranten liegenden Teils des kartesischen Blattes.

Hinweis: Das kartesische Blatt ist die Fläche, die von der Kurve

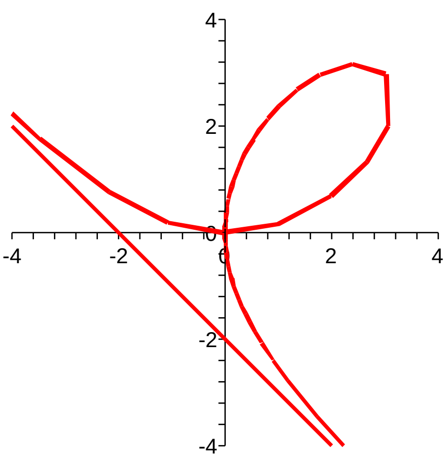
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

und der Geraden

$$x + y = -a$$

eingeschlossen wird.

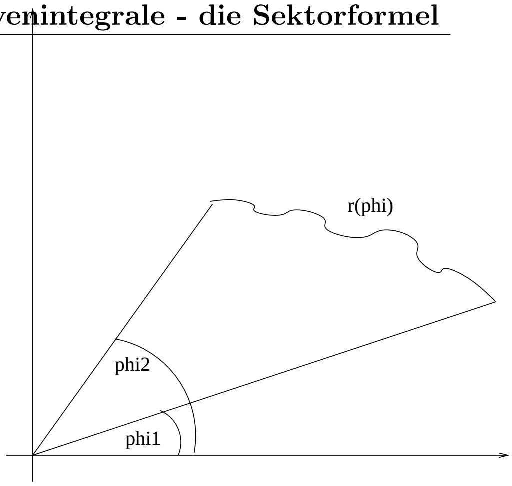
Um eine Parametrisierung zu erhalten, versuchen Sie den Ansatz $y = t\,x$.



Aufgabe 305: Flächenberechnung über Kurvenintegrale - die Sektorformel

1. Leiten Sie aus dem Gaußschen Satz in der Ebene durch Angabe eines speziellen Vektorfeldes eine Formel her, um den Flächeninhalt über ein Kurvenintegral zu berechnen.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines sektorförmigen Gebietes, d. h. eines Gebietes, das durch zwei Strahlen aus dem Koordinatenursprung und einer Kurve $r(\varphi)$ begrenzt wird, die den Abstand des Punktes vom Ursprung innerhalb der beide Strahlen angibt.



Kapitel 34

Maße

34.1 messbare Mengen

Aufgabe 306: Messbare Mengen bilden Algebra

Sei μ ein (äußeres) Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{A} = 2^X$ einer Grundmenge X. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar gdw.

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \backslash A) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie:

1. $\emptyset$ ist messbar.
2. Nullmengen sind messbar.
3. X ist messbar.
4. Ist $A \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $X \backslash A$ messbar.
5. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $D := A_1 \cap A_2$ messbar.
6. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ messbar, dann ist auch $V := A_1 \cup A_2$ messbar.

Bemerkung: Aus den Punkten a), d) und e) folgt bereits, dass die messbaren Mengen eine Algebra bilden.

Zusatzaufgabe: Zeige, dass die messbaren Mengen sogar eine σ-Algebra bilden, d. h.:

Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ messbar, dann sind auch

$$D = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$$

messbar.

34.2 Nullmengen

Aufgabe 307: Fast alle in endlich vielen Mengen

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X und $\{A_n\}_{n\geq 1},\ A_n \in \mathcal{A}$ eine Folge meßbarer Mengen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$.
Zeigen Sie:
Fast alle $x \in X$ gehören zu höchstens endlich vielen der Mengen A_n.

Kapitel 35

Prinzip des Cavalieri - Guldinsche Regel

Aufgabe 308: Cavalierie-Prinzip

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ sei $a \leq x_n \leq b$.

$$Q(x_n) := \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', x_n) \in B \right\}$$

$$q(x_n) := \left| Q(x_n) \right|_{n-1}$$

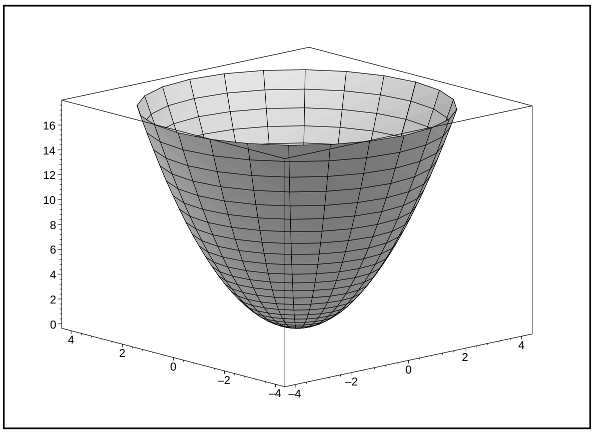
Man zeige:

$$|B| = \int_a^b q(x_n)\, dx_n.$$

Aufgabe 309: Inhalt eines Glases

Das Innere eines Glases soll die Form eines Rotationsparaboloids $z = x^2 + y^2$ haben. Berechne das Volumen V und die Oberfläche O des Glasinneren
mittels

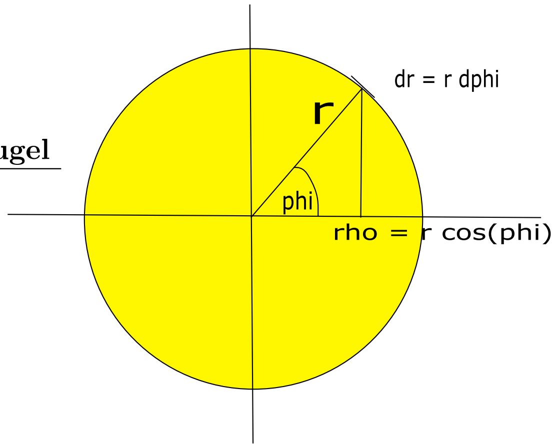
1. Guldinscher Regel,
2. Volumenberechnung durch Integration im $\mathbb{R}^3$.



Welche Höhe h muss das Innere des Glases haben, wenn es 0,5 Liter fassen soll.

Aufgabe 310: Die n-dimensionale Einheitskugel

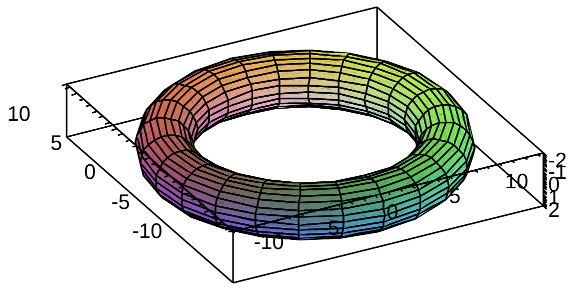
Man bestimme Volumen und Oberfläche der n-dimensionalen Kugel vom Radius r mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri!



Aufgabe 311: Volumen und Oberfläche des

Man berechne Volumen V und Oberfläche O des Torus

1. mit dem Cavalieri-Prinzip
2. direkt durch geeignete Koordinatendarstellung und Transformationsformel.



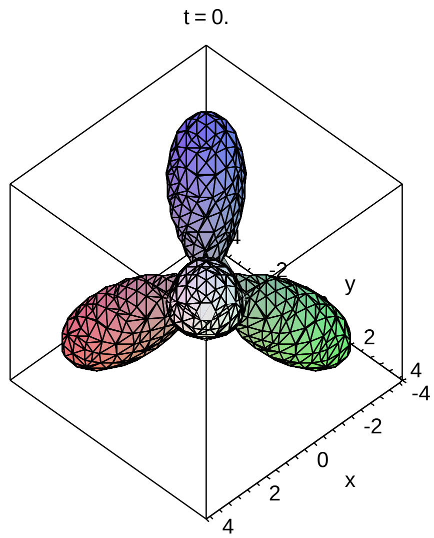
Kapitel 36

Volumenintegrale im R3

Aufgabe 312: Kugelkoordinaten

Man berechne das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von der Fläche

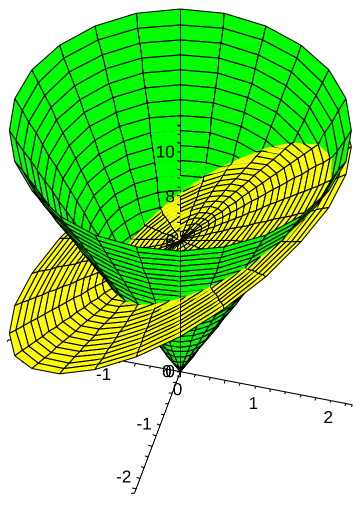
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$$



Aufgabe 313: Kegelhalbierung

Ein gerader Kreiskegel mit Grundkreisradius r und Höhe h wird durch einen ebenen Schnitt im Winkel α zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile geteilt. (α sei dabei natürlich echt kleiner als der Mantelwinkel des Kegels, so dass als Schnittfläche eine Ellipse entsteht, deren Rand ganz auf dem Kegelmantel liegt.)

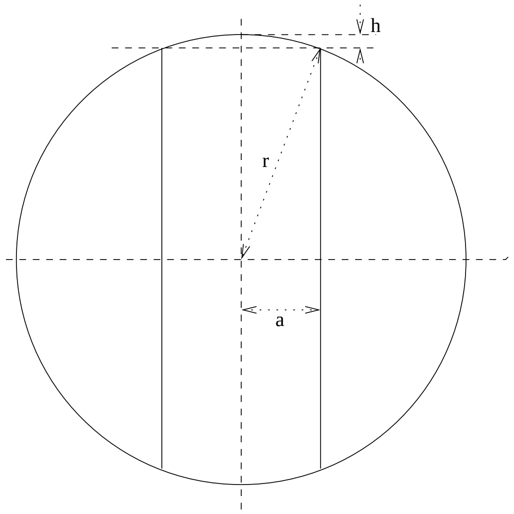
Wie groß ist die Schnittfläche und in welcher Höhe schneidet die Schnittebene die Kegelachse?



Aufgabe 314: Kugel mit Loch

In eine Kugel vom Radius r wird ein zylindrisches Loch vom Radius a so gebohrt, dass die Zylinderachse durch den Kugekmittelpunkt geht. Die Höhe des Loches beträgt 1 m.

Wie groß ist das Volumen des Restkörpers?



Teil IX

Mengen

Kapitel 37

Kombinatorik

Aufgabe 315: Grundaufgaben der Kombinatorik

Es seien $M = \{1, \ldots, m\}$ und $N = \{1, \ldots, n\}$ mit natürlichen Zahlen m, n. Bestimmen Sie die Anzahl aller

1. eindeutigen Abbildungen $f : M \mapsto N$;
2. eindeutigen Abbildungen $f : M \mapsto N$ mit $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(m)$;
3. eineindeutigen Abbildungen $f : M \mapsto N$;
4. eineindeutigen Abbildungen $f : M \mapsto N$ mit $f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(m)$.

Kapitel 38

Mächtigkeit

Aufgabe 316: Abzählbarkeit von Teilmengen von $\mathbb{N}$

Beweisen Sie: Die Menger aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Gilt das auch für die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$?

Kapitel 39

Mengenbeziehungen

Aufgabe 317: Symmetrische Differenz

Für Mengen X, Y setzen wir $X * Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ (symmetrische Differenz von X und Y). Zeigen Sie, dass für Mengen X, Y, Z gilt

1. $X * Y = Y * X$ (*Kommutativität*)
2. $X * \emptyset = X$
3. $(X * Y) * Z = X * (Y * Z)$ *Assoziativität*)

und bestimmen Sie für eine Menge A alle Mengen B mit $A * B = \emptyset$.

Kapitel 40

Supremum und Infimum

Aufgabe 318: Beschränktheit von Mengen

Untersuchen Sie, ob die unter a) - c) definierten Mengen M reeller Zahlen nach oben oder unten beschränkt sind. Wenn ja, dann bestimmen Sie gegebenfalls $\sup M$ und $\inf M$. Existieren dann auch $\max M$ oder $\min M$?

1. $M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$,
2. $M := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 > 5 \ x < 0 \}$,
3. $M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = t + \frac{1}{t},\ 0 < t \leq 10,\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 319: Supreum und Infimum von Mengenkombinationen

Es seien X, Y nichtleere, beschränkte Mengen reeller Zahlen und

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}\,,\ X \cdot Y := \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}\,.$$

1. Beweisen Sie:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y,\ \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

   Gilt auch stets

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y,\ \inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y?$$

2. Zeigen Sie:

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X,\ \sup Y\}\,,\ \inf(X \cup Y) = \min\{\inf X,\ \inf Y\}\,.$$

   Ist $X \cap Y \neq \emptyset$, so ist

$$\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X,\ \sup Y\}\,,\ \max\{\inf X,\ \inf Y\} \leq \inf(X \cap Y).$$

   Kann hierbei das Kleiner-Zeichen auftreten?

Teil X

Numerik

Kapitel 41

Fehleranalyse

Aufgabe 320: differentielle Algorithmusanalyse

1. Bestimmen Sie die absolute und relative Problemkonditionszahl für die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}; \quad x > 1.$$
2. Beurteilen Sie mit Hilfe der differentiellen (relativen) Stabilitätsanalyse, welcher der beiden möglichen Algorithmen der bessere ist.

Kapitel 42

Fixpunktiteration

Aufgabe 321: Fixpunktiteration bei einer Funktion 3. Grades

1. Bestimmen Sie numerisch die Nullstellen des kubischen Polynoms $P = P(x)$ mit

$$P(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}.$$

   Schreiben Sie dazu die Gleichung $P(x) = 0$ in Fixpunktform um und überprüfen Sie, ob im Intervall $[0, 1]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt sind. Starten Sie die sukzessive Iterationsfolge mit $x_0 = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie sechs Iterationen, d. h. $x_1, \ldots, x_6$.

2. Welche Fehlerabschätzungen liefern die a priori und a posteriori Abschätzungen?

3. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen durch Abspaltung eines Linearfaktors und Lösung einer quadratischen Gleichung. Wie lässt sich der Fehler der weiteren Nullstellen abschätzen?

Kapitel 43

Gauss-Algorithmus

Aufgabe 322: Beispiel zur Pivotisierung

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$$

in fünfstelliger Dezimal-Gleitkomma-Arithmetik

- bei einem Rechner, der abschneidet
- bei einem Rechner, der rundet.

1. Verwenden Sie je einmal den Gauß-Algorithmus ohne Pivotisierung, mit Spaltenpivotisierung und mit Totalpivotisierung!
2. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung und erklären Sie die Ursache für auftretende Fehler!
3. Beurteilen Sie die Akzeptanz der Näherungslösungen mit dem Satz von Prager/Oettli!
4. Führen Sie gegebenenfalls eine Nachiteration durch!

Kapitel 44

Integration

44.1 Gauss-Quadratur

Aufgabe 323: Ein Beispiel zur Gaußquadratur mit 2 Stützstellen

Man bestimme in der Arithmetik $\mathbb{M}_{10,5}$ die beste Quadraturformel über dem Intervall $I = [\pi, 2\pi]$ und berechne damit

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\, dx.$$

Aufgabe 324: Ein Beispiel zur Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

Man bestimme in der Arithmetik $\mathbb{M}_{10,5}$ die beste Quadraturformel über dem Intervall $I = [0, \pi]$ und berechne damit

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\, dx.$$

Teil XI

Partielle Differentialgleichungen

Kapitel 45

erster Ordnung

45.1 Charakteristikenmethode

Aufgabe 325: Anfangswertproblem

Lösen sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x\nabla u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 &= u(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x) &= \frac{1}{2}(1-|x|^2) \quad \text{für} \quad x \in S = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 326: Charakteristisches System

Leiten Sie eine explizite Darstellungsformel für die Lösung $u = u(t,x)$ des folgenden Anfangswertproblems her:

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla_x u + bu &= 0 \ \text{ in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) &= g(\cdot) \ \text{ in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Hierin sind $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ konstant sowie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gegebene, stetig differenzierbare Funktion.

Aufgabe 327: Charakteristikenmethode

Es seien $E \subset \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene Einheitskreis, f eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion in E, sowie $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -a(xu_x + yu_y) + u &= f \quad \text{in} \quad E, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial E \end{aligned}$$

hat dann nach der Charakteristikenmethode eine stetig differenzierbare Lösung $u = u(x, y)$ zumindest in $E \backslash (0, 0)$.

1. Zeigen Sie, dass u beschränkt in $E \backslash (0, 0)$ ist.
2. Läßt sich u stetig in den Nullpunkt fortsetzten?
3. Unter welchen Bedingungen an a kann u auch stetig differenzierbar in den Nullpunkt fortgesetzt werden (und wird damit zu einer Lösung des Randwertproblems in ganz E)?

Aufgabe 328: Einhüllende

1. Es sei $u = u(\cdot, a)$, $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ eine einparametrige Lösungsschar der Differentialgleichung
$$F(\cdot, u, \nabla u) = 0.$$
Ferne existiere die Einhüllende $z = w(x)$ der einparametrigen Flächenschar $M_a = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid z = u(x, a), a \in A\}$ mit einer C^1-Funktion w. Zeigen Sie, dass w wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist. Die Einhüllende heißt dann auch *singuläres Integral* der Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie das singuläre Integral der Differentialgleichung
$$u^2 \left(1 + |\nabla u|^2\right) = 1$$
aus der Lösungsschar
$$u(x, a) = \pm \left(1 - |x - a|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad |x - a| < 1.$$

45.2 Erhaltungsgleichungen

Aufgabe 329: Burgers Gleichung

Konstruieren Sie eine schwache Lösung für die Burgers Gleichung

$$u_t + \frac{1}{2}\left(u^2\right)_x = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

mit den Anfangswerten

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq 0, \\ 1-x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

Aufgabe 330: Randextremwerte

Sei $u = u(x,y)$ eine stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u \tag{45.1}$$

im abgeschlossenen Einheitskreis $B \subset \mathbb{R}^2$. Es gelte ferner

$$a(x,y)x + b(x,y)y > 0 \qquad \text{für alle} \qquad (x,y) \in \partial B. \tag{45.2}$$

Beweisen Sie, daß u in B identisch verschwindet.

Hinweis: Zeigen Sie $\max_B u \leq 0$ und $\min_B u \geq 0$, wobei für die Untersuchung des Verhaltens von u in den Randpunkten die Bedingung (2) an die Koeffizienten ausgenutzt wird.

Kapitel 46

Multiindizes

Aufgabe 331: Polynomische Formel und verallgemeinerte geometrische Reihe

Beweisen Sie als Beispiele zur Anwendung der Multiindexschreibweise die folgenden beiden Identitäten:

(46.1)
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!\, x^\alpha}{\alpha!}$$

(46.2)
$$\big(1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\big)^{-1} = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{|\alpha|!\, x^\alpha}{\alpha!}$$

Für welche $x_1, \ldots, x_n$ konvergiert die letzte Reihe absolut?

Kapitel 47

Symbol und Klassifizierung

Aufgabe 332: Hauptsymbol

Es sei $P(x, \partial) = \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator m-ter Ordnung mit stetigen Koeffizienten, $S_m = S_m(x, \xi)$ sein Hauptsymbol und $\phi = \phi(x)$ eine glatte reellwertige Funktion. Zeigen Sie für $|\lambda| \to \infty$ die asymptotische Entwicklung

$$e^{-i\lambda\phi}P(x, \partial)e^{i\lambda\phi} = \lambda^m S_m(x, \phi_{x_1}, \ldots, \phi_{x_n}) + \mathrm{O}(\lambda^{m-1})$$

Kapitel 48

zweiter Ordnung

48.1 elliptische DGLs

48.1.1 Laplace-Operator

Aufgabe 333: Abschätzung harmonischer Funktionen

Beweisen Sie folgende Variante der Abschätzungen für die Ableitungen einer harmonischen Funktion :
Ist u harmonisch in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B)}$$

für jede abgeschlossene Kugel $B = B_r(x_0) \subseteq G$ und jeden Multiindex α der Ordnung k.
Hierbei ist

$$\|u\|_{L^1(B)} := \int_B |u(x)|\, dx$$

die Norm von u im Raum $L^1(B)$ und

$$C_0 := \frac{1}{\gamma_n},\ C_k := \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\gamma_n},\ k = 1, 2, \cdots,$$

wobei γ_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 334: a-priori-Abschätzung

Es sei B die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Existenz einer nur von n abhängigen Konstanten C , so dass

$$\max_{x\in B} |u(x)| \leq C \left(\max_{x\in\partial B} |u(x)| + \max_{x\in B} |\Delta u(x)| \right)$$

für jede Funktion $u \in C^2(B)$ gilt.

Aufgabe 335: Differenzenverfahren

In der Vorlesung wurde zum Anfangswertproblem

$$(48.1) \qquad u_t + c\,u_x = 0, \quad u(0,x) = f(x)$$

mit $c \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R})$ das Differenzenverfahren über einem Gitter mit den Maschenweiten $h, k > 0$ und

$$(48.2) \qquad \frac{v(t+k,x) - v(tx)}{k} + c\frac{v(t,x+h) - v(t,x)}{h} = 0, \qquad v(0,x) = f(x)$$

betrachtet. Zeigen Sie für $c < 0$ die Konvergenz. Genauer: Die Differenz $w = u - v$ zwischen der exakten Lösung und der Naherungslösung geht in allen Gitterpunkten aus einer beschränkten Menge des $\mathbb{R}^2_+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \geq 0\}$ gleichmäßig mit h, k gegen Null,falls $c < 0, \lambda := k/h > 0$ fest bleibt und $\lambda c \leq 1$ gilt.
Hinweis:Zeigen Sie zunächst

$$|w(t+k,x)| \leq (1 - \lambda|c|)\,|w(t,x)| + \lambda|c|\,|w(t,x+h)| + o(h).$$

Aufgabe 336: Eine spezielle Integraleigenschaft harmonischer Funktionen

Es sei $u = u(x)$ harmonisch in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ferner seien $0 < a \leq b \leq c$ reelle Zahlen mit $ac = b^2$ und $x_0 \in \Omega$ mit $B_c(x_0) \subset \Omega$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{|\omega|=1} u(x_0 + a\,\omega)\,u(x_0 + c\,\omega)\,d\omega = \int_{|\omega|=1} u^2(x_0 + b\,\omega)\,d\omega.$$

Aufgabe 337: elliptische Koordinaten

1. Rechnen Sie den Laplace-Operator in der Ebene auf sogenannte elliptische Koordinaten um. Dazu werden Koordinaten (η, φ) im $\mathbb{R}^2$ eingeführt durch

$$x = c \cosh \eta \, \cos \varphi, \;\; y = c \sinh \eta \, \sin \varphi, \;\; c = const. > 0.$$

Welchen Kurven in der $(x; y)$-Ebene entsprechen den Linien $\eta = const.$ bzw. $\varphi = const.$?

2. Sei $\psi = \psi(x_1, x_2)$ harmonisch und $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\eta; \varphi)$ entstehe aus ψ durch Umrechnen auf elliptische Koordinaten, d.h.

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(c \cosh \eta \, \cos \varphi, \; c \sinh \eta \, \sin \varphi) = \tilde{\psi}(\eta, \varphi).$$

Welcher Gleichung genügt dann $\tilde{\psi}$?

3. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ die Ellipse

$$G := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1 \right\}, a, b > 0.$$

Bestimmen Sie unter Benutzung elliptischer Koordinaten eine Lösung $\psi = \psi(x_1, x_2)$ des folgenden äußeren Dirichletproblems:

$$\begin{array}{rcl} \Delta\psi & = & 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \backslash G, \\ \psi & = & x_1 \quad \text{auf} \quad \partial G, \\ |\psi| & & \text{beschränkt für} \quad |x| \to \infty. \end{array}$$

Aufgabe 338: Anwendung der Greenschen Formel

Es sei u in der punktierten Kugel $B_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < R\}$ harmonisch. Zeigen Sie:

1. Für $r \in (0, R)$ ist der Wert des Integrals

$$\int_{\partial B_r(x0)} \frac{(x - x_0) \cdot \nabla u(x)}{|x - x_0|} \, do_x$$

unabhängig von r.

2. Es ist

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \, do_y = \begin{cases} \frac{c_0}{2-n} r + d_0 r^{n-1} & \text{falls } n \geq 3, \\ c_0 r \ln r + d_0 r & \text{falls } n = 2 \end{cases}$$

mit Konstanten c_0, d_0. Welchen Wert hat c_0?

Aufgabe 339: Greensche Funktion für den Halbraum

Bestimmen Sie die Greenschen Funktionen für das Dirichletproblem für den Halbraum $H = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \; |x_n > 0\}$,

Aufgabe 340: Grennsche Funktion für die Halbkugel

Bestimmen Sie die Greenschen Funktionen für das Dirichletproblem für die Halbkugel $K_R = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \; ||x| < R, x_n > 0\}$.
Hinweise: Machen Sie analog zum Vorgehen bei der Berechnung der Greenschen Funktion für die Kugel jeweils geeignete Ansätze mittels des Spieglungsprinzips.

Aufgabe 341: Grundlösungsmethode für die Poisson-Gleichung im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie mit der Fundamentallösungsmethode eine Lösung.

Aufgabe 342: Hintereinanderausführung und subharmonische Funktionen

1. Es seien B eine reelle $(n \times n)$-Matrix, $c \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) = Bx + c$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie
$$\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q,$$
wobei
$$L_0 := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$
ist und die a_{ik} die Elemente der Matrix $A := BB^T$ sind. Insbesondere ist also $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist.

2. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Ferner sei u harmonisch in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Funktionen $v := \phi \circ u$ und $w := |\nabla u|^2$ sind subharmonisch. in G

Aufgabe 343: Integralabschätzung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ein beschränktes Gebiet, für das der Gaußsche Satz gilt.
Es sei $u \in C^2(\bar{G})$ eine reelle Funktion mit $u = 0$ auf ∂G.
Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$2 \int_G |\nabla u(x)|^2 dx \leq \epsilon \int_G (\triangle u(x))^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_G u^2(x) dx$$

Aufgabe 344: Kugelpotential

Es sei $V(x)$ das Newtonsche Volumenpotential einer offenen Kugel $B_R \in \mathbb{R}^3$ vom Radius $R > 0$ um den Nullpunkt mit der Dichte $\rho(x) = |x|^2$ ($|x|$ bezeichnet die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^3$) im Aufpunkt x, d.h.

$$V(x) = \iiint_{B_R} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

1. Berechnen Sie $V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}^3$ ist $V = V(x)$ zweimal stetig differenzierbar?
3. Bestätigen Sie durch direktes Nachrechnen mittels a)

$$\Delta V = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B}_R, \quad \Delta V = -4\pi |x|^2 \quad \text{in} \quad B_R$$

Aufgabe 345: Maximumprinzip

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, nichtleeres Gebiet.

1. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $g := u|_{\partial\Omega}$ und $-\Delta u(x) + u(x)a(x) = 0$ $(*)$ für $x \in \Omega$ mit einer positiven Funkion a. Zeigen Sie für $x \in \Omega$:

   $(**)$ $$\min\{0, \min g\} \leq u(x) \leq \max\{0, \max g\}$$

2. Machen Sie sich mir Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichung $-u'' + u = 0$ klar, dass man in a) nicht $\min g \leq u(x) \leq \max g$ erwarten darf.
3. Sei u in Ω eine harmonische Funktion, deren Gradient stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar ist. Zeigen Sie, dass mindestens eine Maximalstelle von $|\nabla u|^2$ auf $\partial\Omega$ liegt.

Aufgabe 346: Minimumprinzip

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, nichtleeres Gebiet, $T \subseteq \overline{\Omega}$ und $\Omega \setminus T$ sei offen.
Ferner sei $u : \Omega \setminus T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden drei Eigenschaften:

(1) u ist harmonisch in $\Omega \setminus T$.
(2) Für alle $x_0 \in \partial\Omega \setminus T$ gilt $u(x) \to 0$, wenn x in $\Omega \setminus T$ gegen x_0 strebt.
(3) Es gibt eine harmonische Funktion $w : \Omega \setminus T \to (0, \infty)$ so, dass für alle $\xi \in T$ gilt:
$|u(x)|/w(x) \to 0$, wenn x in $\Omega \setminus T$ gegen ξ strebt.

Zeigen Sie, dass dann $u = 0$ in $\Omega \setminus T$ ist.

Aufgabe 347: Neumann-Funktion

1. Die Neumannsche Funktion $N = N(x, y)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird definiert wie die Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem mit dem Unterschied, dass die Bedingung $G(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega, y \in \Omega$ ersetzt wird durch $\frac{\partial N}{\partial n}(x, y) = const.$ für $x \in \partial\Omega, y \in \Omega$. Formulieren und beweisen Sie mit Hilfe der 2. Greenschen Formel eine Darstellung für die Lösung des Neumann-Problems mit Hilfe der Neumannschen Funktion. Inwieweit ist die Konstante bestimmt?

2. Lösen Sie das Neumann-Problem für eine Kugel im $\mathbb{R}^3$. Gegeben ist eine Funktion $h : \partial B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $\int_{\partial B_r(0)} h(x) do_x = 0$. Gesucht ist eine Darstellung (z. B. mittels a)) der Lösung $u = u(x)$ von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad B_R(0) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h \quad \text{in} \quad \partial B_R(0). \end{aligned}$$

Aufgabe 348: Separation für EW-Problem

Bestimmen Sie durch Separation der Variablen die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems im Rechteck $R := [0, a] \times [0, b] \subseteq \mathbb{R}, a, b > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\lambda u \quad \text{in} \quad R \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial R \end{aligned}$$

Aufgabe 349: Separationsansatz im Kreis

Wir betrachten das Randwert–Problem für die Laplace–Gleichung *(Dirichlet–Problem)* in einem Gebiet Ω des $\mathbb{R}^2$ für eine Funktion $f \in C(\partial\Omega)$,

$$(\mathbf{P}) \qquad \begin{aligned} & u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \\ & \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ & u = f \ \text{auf} \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Lösen Sie **(P)** in der Einheitskreisscheibe $B_1 := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ für die folgenden Randverteilungen: **(a)** $f_1(x,y) = 1$, **(b)** $f_2(x,y) = x^3$.

Aufgabe 350: Temperaturverteilung auf Kugelschale

Eine sphärische Schale mit dem inneren Radius 1 und dem äußeren Radius 2 habe eine stationäre (d. h. zeitunabhängige) Temperaturverteilung. Die innere Randfläche werde auf einer Temperatur von 100°C gehalten, auf dem äußeren Rand gelte $\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma$, wobei n die äußere Normale und $\gamma < 0$ konstant ist.

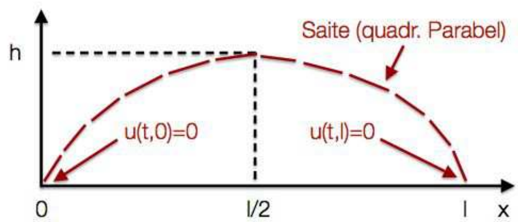
1. Bestimmen Sie die Temperaturverteilung in der Schale.
2. Kann γ so gewählt werden, dass die Temperatur auf dem äußeren Rand 20°C beträgt?

48.2 hyperbolische DGLs

48.2.1 Wellengleichung

Aufgabe 351: Eingespannte Saite

Eine homogene, an $x = 0, x = l$ eingespannte Saite habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form einer Parabel, die bzgl. der in $x = \frac{l}{2}$ erreichten Senkrechten symmetrisch die Höhe h hat. Suchen die Auslenkung $u = u(t,x)$ eines Punktes der Saite von der geradlinigen Gleichgewichtslage unter der Voraussetzung, dass die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist.



Aufgabe 352: Parallelogrammbedingung

Bestimmen Sie die Lösung $u = u(t, x)$ des charakteristischen Anfangswertproblems für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{48.3}$$

Genauer: Auf zwei sich schneidenden Charakteristiken

$$x + at = \alpha,\ x - at = \beta$$

seien die Werte der gesuchten Funktion u vorgegeben:

$$u(t, \alpha - at) = f(t),\ u(t, \beta + at) = g(t)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f, g, so dass im Schnittpunkt der Charakteristiken die Werte übereinstimmen.

1. Bestimmen Sie die Lösung u in Abhängigkeit von den Funktionen f und g.
2. Bestätigen Sie für u die Formel
$$u(t_0, x_0) + u(t_1, x_1) = u(t_2, x_2) + u(t_3, x_3)$$
für jedes „charakteristische Parallelogramm“, d. h. $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$ und $(t_2, x_2), (t_3, x_3)$ sind gegenüberliegende Eckpunkte in einem Parallelogramm, dessen Seiten auf Charakteristiken der Wellengleichung liegen.
3. Zeigen Sie umgekehrt, dass jede dreimal stetig differenzierbare Funktion $u = u(t, x)$, die die Eigenschaft b) für alle charakteristischen Parallelogramme besitzt, eine Lösung der Wellengleichung ist.

Aufgabe 353: Kugelkoordinaten

Rechnen Sie die Differentialoperatoren

$$Lu = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + c(u_{xy} + u_{xz} + u_{yz}), \quad c = \text{const.} \in \mathbb{R}$$

(x, y, z kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$) auf räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) um.

48.3 parabolische DGLs

Aufgabe 354: Separationsansatz

Gesucht ist $u = u\,(t, x)$, so dass

$$t \cdot u_t = u_{xx} + 2u$$

unter der Randbedingung

$$u\,(t, 0) = u\,(t, \pi)$$

48.3.1 Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe 355: Lösung der Wärmeleitungsgleichung im 1. Quadranten

Sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\, g(s)\, ds, \quad x > 0,\ t > 0$$

eine Lösung des folgenden Rand/Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x > 0, \\ u(0,t) &= g(t) \quad \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

liefert. Welche Regularität für g ist ausreichend?
Hinweis: Betrachten Sie $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ und setzten Sie v für negative x-Werte geeignet fort.

Aufgabe 356: spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Sei $v = v(z), z > 0$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen z und $u = u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$ für $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

1. Zeigen Sie: u genügt genau dann der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

   $$u_t = u_{xx},$$

   wenn

   $$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, z > 0.$$

2. Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der letzten Gleichung für v gegeben wird durch

   $$v(z) = c * \int_0^z e^{-\frac{1}{4}s} * s^{-\frac{1}{2}}\, ds + d$$

   mit Konstanten c, d.

3. Differenzieren Sie $v(\frac{x^2}{t})$ nach x und bestimmen Sie die Konstante c so, daß der Wärmeleitungskern im $\mathbb{R}^1$ entsteht.

Teil XII

Topologie

Kapitel 49

Abgeschlossene Mengen

Aufgabe 357: Abschluss als Durchschnitt abgeschlossener Mengen

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) ist der Abschluss $\bar{A}$ (gleich A vereinigt mit der Menge der Randpunkte) darstellbar als

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in \mathfrak{A}} B, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{A} = \{B \mid A \subseteq B \subseteq M, B \text{ abgeschlossen}\},$$

d.h. $\bar{A}$ ist die kleinste A umfassende und abgeschlossene Menge in M.

Kapitel 50

Häufungspunkte

Aufgabe 358: Stammbruchsumme

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass M weder offen noch abgeschlossen ist.

2. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von M.

Hierbei wird $\mathbb{R}$ als normierter Raum mit dem absoluten Betrag als Norm betrachtet.

Kapitel 51

kompakte Mengen

Aufgabe 359: Durchschnitt kompakter Mengen

Es seien (M,d) ein metrischer Raum und $K_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$ kompakte Teilmengen von M mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

1. Beweisen Sie, dass dann unter den Mengen K_n, $n \in \mathbb{N}$ auch endlich viele Mengen $K_{n_1}, \ldots, K_{n_m}$ existieren mit

$$K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap \cdots \cap K_{n_m} = \emptyset.$$

2. Gilt die entsprechende Aussage auch, wenn nur die Abgeschlossenheit und Beschränktheit der Mengen K_n vorausgesetzt wird?

Kapitel 52

Offene Mengen

Aufgabe 360: Durchnitt mit offenen Mengen

1. Es sei A eine offene Menge in einem metrischen Raum M. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge B von M die Beziehung $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ gilt.

2. Geben Sie ein Beispiel zweier Intervalle A, B auf der reellen Zahlengeraden an, für die die Menge $A \cap \overline{B}$ nicht in der Menge $\overline{A \cap B}$ enthalten ist.

3. Geben Sie auf der reellen Zahlengeraden Beispiele offener Mengen A, B an, so dass die vier Mengen $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ sämtlich voneinander verschieden sind.

Kapitel 53

Stetigkeit

Aufgabe 361: Stetigkeit und Topologie

Seien X und Y metrische Räume und $f : X \mapsto Y$ eine stetige Abbildung.

1. Geben Sie wenigstens drei mögliche Definitionen von Stetigkeit an und beweisen Sie deren Äquivalenz.

2. Beurteilen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen, indem Sie diese beweisen oder ein Gegenbeispiel angeben.

   i) Die Bilder beschränkter Mengen unter f sind wieder beschränkt.

   ii) Die Urbilder beschränkter Mengen unter f sind wieder beschränkt.

   iii) Die Bilder offener Mengen unter f sind wieder offen.

   iv) Die Urbilder offener Mengen unter f sind wieder offen.

   v) Die Bilder abgeschlossener Mengen unter f sind wieder abgeschlossen.

   vi) Die Urbilder abgeschlossener Mengen unter f sind wieder abgeschlossen.

   vii) Die Bilder kompakter Mengen unter f sind wieder kompakt.

   viii) Die Urbilder kompakter Mengen unter f sind wieder kompakt.

3. Wie ändern sich die Aussagen, wenn X und Y normierte Vektorräume sind und f auch noch linear ist?

Kapitel 54

Zusammenhang

Aufgabe 362: Beispiel für einen nicht zusammenhängenden topologischen Raum

Definition: Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *zusammenhängend* genau dann, wenn keine offenen, disjunkten, nichtleeren Mengen $U, V \in \tau$ mit $X = U \cup V$ existieren.
(X, τ) heißt *bogenzusammenhängend* genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ mit $\omega(a) = x, \omega(b) = y$ existiert. ω heißt Weg von x nach y.
$A \subset X$ heißt zusammenhängend (bogenzusammenhängend) genau dann, wenn (A, τ_A) zusammenhängend (bogenzusammenhängend) ist. D. h. $A \subset X$ ist zusammenhängend, genau dann wenn es keine offenen Mengen $U, V \subset X$ gibt, so dass

- $A \subseteq U \cup V$,
- $A \cap (U \cap V) = \emptyset$,
- $A \cap U \neq \emptyset,\ A \cap V \neq \emptyset$.

1. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen. Betrachten Sie den Teilraum

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \frac{1}{x}\}$$

   versehen mit der Relativtopologie. Ist X zusammenhängend? Ist X wegzusammenhängend?

2. Zeigen Sie, dass die zusammenhängenden Mengen von $\mathbb{R}$ gerade die Intervalle sind.