Beispiel für einen nicht zusammenhängenden topologischen Raum

Definition: Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *zusammenhängend* genau dann, wenn keine offenen, disjunkten, nichtleeren Mengen $U, V \in \tau$ mit $X = U \cup V$ existieren.
(X, τ) heißt *bogenzusammenhängend* genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\omega : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ mit $\omega(a) = x, \omega(b) = y$ existiert. ω heißt Weg von x nach y.
$A \subset X$ heißt zusammenhängend (bogenzusammenhängend) genau dann, wenn (A, τ_A) zusammenhängend (bogenzusammenhängend) ist. D. h. $A \subset X$ ist zusammenhängend, genau dann wenn es keine offenen Mengen $U, V \subset X$ gibt, so dass

- $A \subseteq U \cup V$,
- $A \cap (U \cap V) = \emptyset$,
- $A \cap U \neq \emptyset,\ A \cap V \neq \emptyset$.

a) Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen. Betrachten Sie den Teilraum

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y = \frac{1}{x}\}$$

versehen mit der Relativtopologie. Ist X zusammenhängend? Ist X wegzusammenhängend?

b) Zeigen Sie, dass die zusammenhängenden Mengen von $\mathbb{R}$ gerade die Intervalle sind.