

Fixpunktiteration bei einer Funktion 3. Grades

- a) Bestimmen Sie numerisch die Nullstellen des kubischen Polynoms $P = P(x)$ mit

$$P(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}.$$

Schreiben Sie dazu die Gleichung $P(x) = 0$ in Fixpunktform um und überprüfen Sie, ob im Intervall $[0, 1]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt sind. Starten Sie die sukzessive Iterationsfolge mit $x_0 = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie sechs Iterationen, d. h. x_1, \dots, x_6 .

- b) Welche Fehlerabschätzungen liefern die a priori und a posteriori Abschätzungen?
- c) Berechnen Sie die weiteren Nullstellen durch Abspaltung eines Linearfaktors und Lösung einer quadratischen Gleichung. Wie lässt sich der Fehler der weiteren Nullstellen abschätzen?