Existenz und Berechnung der n-ten Wurzel

Sei $x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x, 0 < y < 1,\ y < x$ und $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Die Abbildungen $f_+, f_- : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert

$$f_-(0) = y, \quad f_-(n+1) = f_-(n) + h(f_-(n)), \quad f_+(n) = f_-(n) + g(f_-(n)),$$

wobei für $z > 0$

$$h(z) = \min\left\{1, \frac{x - z^p}{p(z+1)^{p-1}}\right\}, \quad g(z) = \frac{x - z^p}{pz^{p-1}}.$$

Zeige

$$f_-(n) \leq f_-(n+1) \leq f_+(m), \quad \forall_{n,m}$$

und beweise damit

$$\sup f_-(\mathbb{N}) = \inf\{\sup\{f_+(m) \mid m > k\} \mid k \in \mathbb{N}\} = \sqrt[p]{x}$$

.