allgemeine Binomialkoeffizienten

Für dien gewöhnlichen Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n}$ erhält man für $m, n \in \mathbb{N}$ durch Kürzen mit $(m-n)!$ auch

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m\,(m-1)\,\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

In dieser Form muss nun m nicht mehr notwendig eine natürliche Zahl sein.
Dementsprechend kann man für $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ einen „verallgemeinerten" Binomialkoeffizienten definieren durch

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Man zeige:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n-k} \binom{\beta}{k} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$