Größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache I

Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$.
$n \in \mathbb{Z}$ heißt größter gemeinsamer Teiler von X ($\mathrm{ggT}\, X$), wenn folgendes gilt:

- $n|x$ für alle $x \in X$ und
- $s|n$ für alle $s \in \mathbb{Z}$ mit $s|x$ für alle $x \in X$.

$n \in \mathbb{Z}$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von X ($\mathrm{kgV}\, X$), wenn folgendes gilt:

- $x|n$ für alle $x \in X$ und
- $n|s$ für alle $s \in \mathbb{Z}$ mit $x|s$ für alle $x \in X$.

Mit $\mathrm{GgT}\, X$ ($\mathrm{KgV}\, X$) bezeichnen wir die Menge aller größten gemeinsamen Teiler (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) von X.
Offensichtlich gilt $\mathrm{GgT}\, \emptyset = \mathrm{GgT}\, \{0\} = \{0\} = \mathrm{KgV}\, \mathbb{Z}$ und $\mathrm{GgT}\, \mathbb{Z} = \{1, -1\} = \mathrm{KgV}\, \emptyset$.
(Hierzu verwendet man: Wenn für $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a| \pm 1$, so folgt $a = \pm 1$.)
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{GgT}\, X = \mathrm{GgT}\, \mathbb{Z}X$

b) Sei I Ideal von $\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ sind äquivalent:

- **(i)** $n \in \mathrm{GgT}\, I$
- **(ii)** $n \in I$ und $n|m$ für alle $m \in I$
- **(iii)** $I = \mathbb{Z}n$.

c) $\mathrm{KgV}\, X = \mathrm{GgT} \bigcap_{x \in X} \mathbb{Z}x$.

Insbesondere sind $\mathrm{GgT}\, X$ und $\mathrm{KgV}\, X$ für jede Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ nicht leer. Weiterhin gilt für $n \in \mathrm{GgT}\, X$: Es gibt $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}$ und $x_1, \ldots, x_p \in X$ mit $n = a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p$.

Bemerkung: Nach dem Darstellungssatz für Ideale in $\mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}n$ und $\bigcap_{x \in X} \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}m$. Dann gilt $\mathrm{GgT}X = \{n, -n\}$ und $\mathrm{KgV}X = \{m, -m\}$. Meist bezeichnet man n als den größten gemeinsamen Teiler und m als das kleinste gemeinsame Vielfache von X und setzt $\mathrm{ggT}X := n$ sowie $\mathrm{kgV}X := m$.