Integritätsringe

Sei R ein Ring. $x \in R$ heißt linker (rechter) Nullteiler von R, wenn es ein $y \in R \setminus \{0_R\}$ gibt mit $xy = 0_R$ ($yx = 0_R$). x heißt Nullteiler von R, wenn x linker oder rechter Nullteiler von R ist. R heißt nullteilerfrei, wenn R außer 0_R keine Nullteiler besitzt. Ein kommutativer nullteilerfreier Ring R mit Einselement $1_R \neq 0_R$ heißt Integritätsring. Zeigen Sie:

a) Jeder endliche nullteilerfreie Ring mit wenigstens zwei Elementen ist Schiefkörper.

Bemerkung: Nach einem Satz von Wedderburn ist jeder derartige Ring bereits kommutativ, also ein Körper.

b) Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent (s. Übungsaufgabe 30):

(i) L_n ist Integritätsring (ii) L_n ist Körper (iii) n ist Primzahl.