Ideale in $\mathbb{Z}$

Für $x \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\mathbb{Z}x := \mathbb{Z}\{x\} \big(= \{ax \mid a \in \mathbb{Z}\}\big)$, s. Aufgabe „Ideale in $\mathbb{Z}$“.
Zeigen Sie:

a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $m|n$ genau dann, wenn $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}m$.

Ferner sind äquivalent:

(i) $n|m$ und $m|n$

(ii) $\mathbb{Z}m = \mathbb{Z}n$

(iii) $m = \pm n$.

Man verwende, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $ab = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$. Wenn $ab = 1$, so folgt $a = b = \pm 1$.

b) Für jedes Ideal I von $\mathbb{Z}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}$ mit $I = \mathbb{Z}m$.

Unter Verwendung der Aufgabe „Ideale in $\mathbb{Z}$“ betrachte man $I \cap \mathbb{N}^+$. Im Fall $I \neq O$ benutze man Division mit Rest.