Ideale in $\mathbb{Z}$

Eine Teilmenge I von $\mathbb{Z}$ heißt Ideal von $\mathbb{Z}$, wenn $I \neq \emptyset$ und wenn für alle $a \in \mathbb{Z}$ und alle $x, y \in I$ gilt $ax, x + y \in I$.

Z. B. sind $\{0\}$ und $\mathbb{Z}$ Ideale von $\mathbb{Z}$. $\{0\}$ wird Nullideal genannt und oft kurz mit O bezeichnet. Offensichtlich gilt $O \subseteq I$ für jedes Ideal I von $\mathbb{Z}$.

Für eine Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ setzen wir

$$\mathbb{Z}X := \begin{cases} O, & X = \emptyset \\ \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, x_1, \ldots, x_n \in X\right\}, & X \neq \emptyset \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für jede Teilmenge X von $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}X$ Ideal von $\mathbb{Z}$.

b) Ist $\mathcal{I}$ eine Menge von Idealen von $\mathbb{Z}$, so ist $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ Ideal von $\mathbb{Z}$.

c) Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $\mathcal{I}$ die Menge aller Ideale I von $\mathbb{Z}$ mit $X \subseteq I$. Dann gilt $\mathbb{Z}X = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$.

d) Für ein Ideal I von $\mathbb{Z}$ gilt $I \cap \mathbb{N}^+ \neq \emptyset$ genau dann, wenn $I \neq O$.