Definition und Eigenschaften von $C(R)$

Sei R ein Ring. In $R^2 = R \times R$ führen wir zwei zweistellige Operationen $+$ und $\cdot$ ein, indem wir für alle $(r_1, r_2), (s_1, s_2) \in R \times R$ setzen

$$\begin{aligned} (r_1, r_2) + (s_1, s_2) &:= (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \ \text{ und} \\ (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) &:= (r_1 s_1 - r_2 s_2, r_1 s_2 + r_2 s_1). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) $(R^2, +, \cdot)$ ein Ring ist, der genau dann kommutativ ist, wenn R es ist. Man bezeichnet ihn mit $C(R)$.

b) $C(R)$ besitzt ein Einselement genau dann, wenn R ein Einselement besitzt.

c) Identifiziert man $x \in R$ mit $(x, 0_R) \in C(R)$, so ist R Unterring von $C(R)$. (Damit darf man z. B. $0_{C(R)} = 0_R$ setzen usw.)

d) Sei R kommutativ. Definiert man für $u := (a, b) \in C(R)$ die Norm von u durch $R \ni N(u) := a^2 + b^2$ ($= (a, b)(a, -b)$ wegen der in c) definierten Identifizierung), so gilt $N(uv) = N(u)N(v)$ für alle $u, v \in C(R)$.

e) Sei R kommutativ. Für $u \in C(R)$ gilt $u \in C(R)^*$ genau dann, wenn $N(u) \in R^*$[a].

f) Sei R kommutativ. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $C(R)$ ist Integritätsring (Körper)

(ii) R ist Integritätsring (Körper) und $N(u) \neq 0_R$ für alle $u \in C(R) \setminus \{0_R\}$

(iii) $N(u) \neq 0_R$ ($N(u) \in R^*$) für alle $u \in C(R) \setminus \{0_R\}$.

[a] Für einen Ring R bezeichnet R^* die Teilmenge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente von R