Division mit Rest III

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$L_n := \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \{0, 1, \ldots, |n| - 1\} & n \neq 0 \end{cases}$$

und definieren zweistellige Operationen $\oplus_n$ und $\odot_n$ auf L_n, indem wir für alle $a, b \in L_n$ setzen (siehe Division mit Rest II)

$$a \oplus_n b := r_n(a + b) \quad \text{und} \quad a \odot_n b := r_n(a \cdot b).$$

(Da offensichtlich $L_n = L_{-n}$, $\oplus_n = \oplus_{-n}$ und $\odot_n = \odot_{-n}$, kann man sich bei den nachfolgenden Überlegungen auf den Fall $n \in \mathbb{N}$ beschränken.)

Zeigen Sie:

a) $(L_n, \oplus_n, \odot_n)$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) L_n ist genau dann ein Körper, wenn n Primelement ist.

Bemerkung: Statt $\oplus_n$ und $\odot_n$ schreibt man kurz $+$ und $\cdot$.