Division mit Rest II

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir:

$$r_n(m) := \begin{cases} m & \text{wenn } n = 0 \\ r & \text{wenn } n \neq 0 \end{cases},$$

wobei r im Fall $n \neq 0$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl ist mit $0 \leq r < |n|$ und $m = qn + r$ für geeignetes $q \in \mathbb{Z}$, (siehe „Division mit Rest I").

Zeigen Sie:

a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $r_n(a) = r_n(b)$ genau dann, wenn $n | a - b$.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} r_n(a+b) &= r_n(r_n(a)+b) = r_n(a+r_n(b)) = r_n(r_n(a)+r_n(b)) \quad \text{und} \\ r_n(a \cdot b) &= r_n(r_n(a) \cdot b) = r_n(a \cdot r_n(b)) = r_n(r_n(a) \cdot r_n(b)). \end{aligned}$$

c) Die Relation „$a \equiv b \iff r_n(a) = r_n(b)$" ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$. Die dazugehörigen Äquivalentklassen heißen auch Restklassen modulo n.